1. (a) (5 Punkte) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Zeigen Sie:

$$\forall a, b \in K : (a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0) \qquad (*)$$

Hinweis: Sie dürfen andere bekannte Eigenschaften in Körpern ohne Beweis benutzen.

(b) (2 Punkte) Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Dann wissen wir aus der Übung, dass $(K \times K, \hat{+}, \hat{\cdot})$ mit

$$(a, b) \mathbin{\hat{+}} (c, d) = (a + c, b + d)$$
$$(a, b) \mathbin{\hat{\cdot}} (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

ein Ring ist. Zeigen Sie, dass $(K \times K, \hat{+}, \hat{\cdot})$ *kein* Körper ist, indem Sie zeigen, dass die Eigenschaft $(*)$ nicht erfüllt ist.

2. (6 Punkte) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig sind.

3. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K und seien $U, W \subseteq V$ Untervektorräume mit den Basen B_U, B_W.

(a) (3 Punkte) Untersuchen Sie, ob die lineare Hülle von $B_U \cup B_W$ gleich der Menge

$$U + W := \{z \in V : \exists u, w \text{ mit } u \in U, w \in W \ z = u + w\}$$

ist.

(b) (4 Punkte) Nehmen Sie an, dass $U \cap W = \{0\}$. Bestimmen Sie eine Basis von $U + W$ und beweisen Sie Ihre Behauptung.