Algrbra und Diskrete Mathematik für Inf und Winf UE-Test 1 - V2

27.November 2023

1 Aufgabe 1: 2,5 Pkt

Wir betrachten folgenden Prüfsummen-Code im Septalsystem (nennen wir diesen "PCS"), welcher wie folgt aufgebaut ist

$$\textbf{PCS } a_1a_2a_3a_4a_5 - p$$

Die codierte Information ist in den Ziffern $a_1, ..., a_5 \in 0, 1, ...6$ **enthalten und die Prüfziffer** $p \in 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ **wird gemäß folgender Vorschrift berechnet:**

$$a_1 + 2 * a_2 + 3 * a_3 + 4 * a_4 + 5 * a_5 + 6 * p \equiv 0 mod 7$$

(a) Man berechne die Prüfziffer p im PCS für die Codierte Information $a_1a_2a_3a_4a_5 = 32123$ **Was wurde in der Vorlesung besprochen, womit man theoretisch für allgemeine Koeffizienten und belibiger Primzahl statt 7 vorgehen könnte?**

(b) Man zeige (algemein, nicht nur zur für spezielle Werte), dass alle Fehler an der 5. Ziffer im PCS erkennt werden, d.h. falls $a_1a_2a_3a_4a - p$ **und** $a_1a_2a_3a_4b - p$ **zwei zulässige Codewörter sind, dann muss** $a = b$ **gelten.**

Begründen sie Ihre antworten bzw. geben Sie Ihren Rechenweg genau an!

2 Aufgabe 2: 3 Pkt

Man erlätere das Prinzip der vollständigen Induktion ann Hand eines Beispieles der Folgenden Identität, welche für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ **gezeigt werden soll:**

$$2^{n+1} * \sum_{k=0}^{n} \frac{1-k*i}{(1+i)^{k+1}} = (n+1) * (1-i)^{n+1}$$

Dabei bezeichnet i die imaginäre Eiinheit, es handelt sich alsu im eine IDentität für komplexe Zahlen. Hinweis: offenbar gilt $(1+i)(1-i) = 2$.

3 Aufgabe 3: 2,5 Pkt

Wir betrachten im folgenden Funktionen (=Abbildungen)

$$f : \{1, 2, ..., n\} \to \{1, 2, 3, 4\}, \text{ mit } n \in \mathbb{N}$$

(a) Sei a_n die Anzahl aller solchen Funktionen bei vorgegebenen n. Man gebe eine explizite Abzählformel für a_n an (für alle $n \geq 1$).

(b) Sei b_n die Anzahl aller Funktionen, wo die Bilder aufeinanderfolgender Elemente heweils verschieden sind, für die gilt:

$$f(i-1) \neq f(i), \text{ für alle } i \in \{2, 3, .., n\}.$$

Man gebe eine explizite Abzählformel für b_n an (für alle $n \geq 1$).

(c) Sei c_n die Anzahl aller Funktionen, für die das Element n genau dreimal als Bild von f auftritt, wo also gilt: $|\{x \in \{1, .., n\} : f(x) = n| = 3$. Wiederum gebe man eine explizite Abzählformel für c_n an (für alle $n \geq 3$).

Begründen Sie Ihre Antworten bzw. geben Sie Ihren Rechenweg genau an!