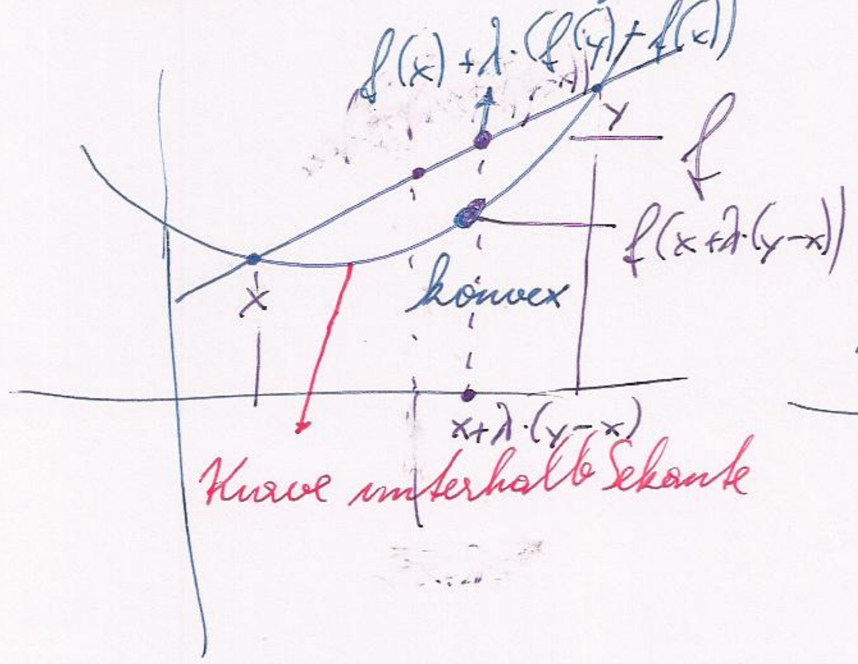
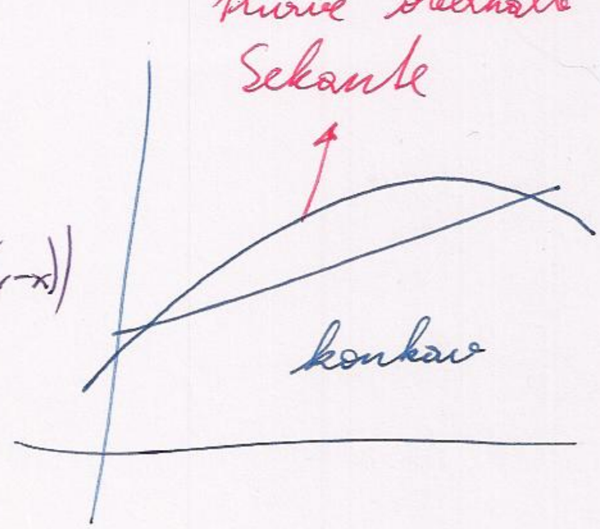
Zweite Ableitung





Def. Fkt. f auf Intervall I konvex, falls $\forall x,y\in I,\ 0<\lambda<1$:

$$f(x+\lambda\cdot(y-x))\leq f(x)+\lambda\cdot(f(y)-f(x))$$

strikt konvex:

$$f(x+\lambda\cdot(y-x))<f(x)+\lambda\cdot(f(y)-f(x))$$

---

konkav:

$$f(x+\lambda\cdot(y-x))\geq f(x)+\lambda\cdot(f(y)-f(x))$$

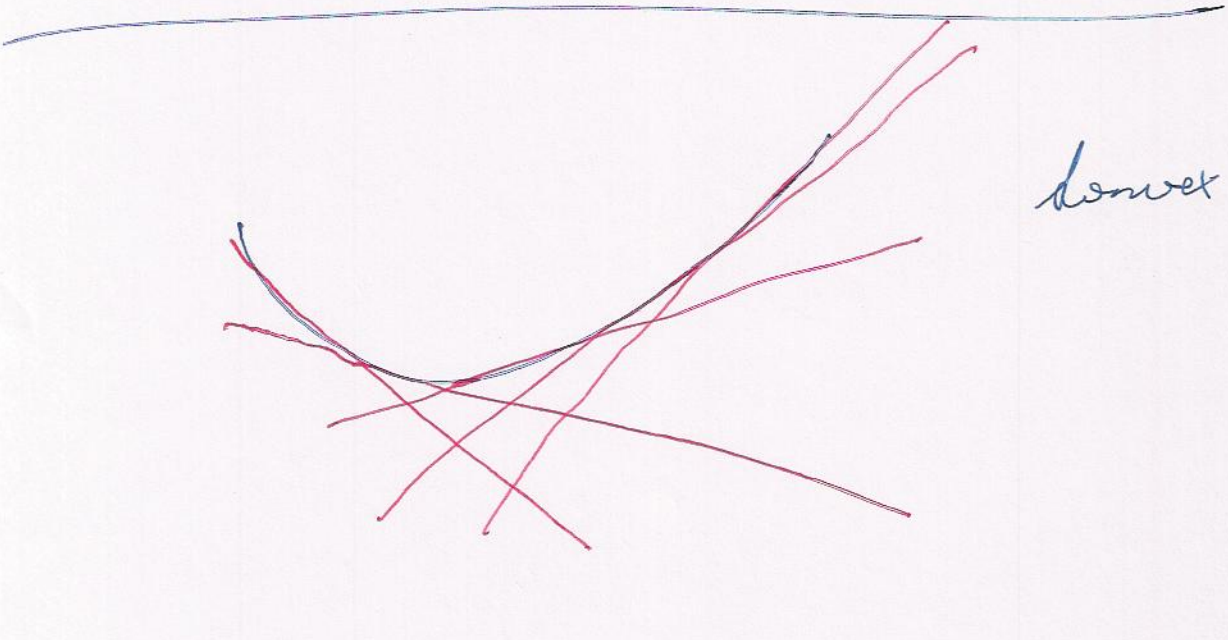
analog: strikt konkav

Satz: Ist f auf Intervall I stetig und im Inneren $\mathring{I}$ differenzierbar.

- f konvex auf I $\Leftrightarrow$ f' auf $\mathring{I}$ monoton wachsend

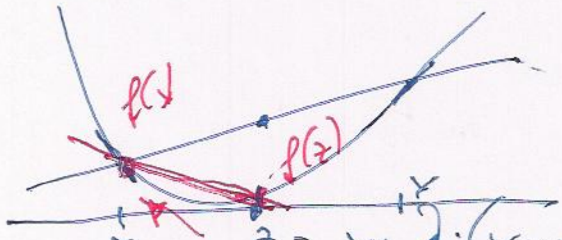
- f konkav auf I $\Leftrightarrow$ f' auf $\mathring{I}$ monoton fallend

strikt $\begin{matrix}\text{konvex}\\ \text{konkav}\end{matrix}$ $\Leftrightarrow$ streng $\begin{matrix}\text{monoton wachsend}\\ \text{monoton fallend}\end{matrix}$



konvex

Beweis: f konvex $\overset{z.z.}{\Rightarrow}$ f' mon. wachsend



$z = x + \lambda \cdot (y-x)$,

$\lambda \in (0,1)$

z.z.: $\forall\, x < y \overset{z.z.}{\Longrightarrow} f'(x) < f'(y)$

$$\boxed{f'(x)} = \lim_{z \to x} \frac{f(z) - f(x)}{z - x} = \lim_{z \to x} \frac{f(x+\lambda\cdot(y-x)) - f(x)}{\lambda \cdot (y-x)} =$$

$z = x + \lambda \cdot (y-x) \Rightarrow z - x = \lambda \cdot (y-x)$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda\cdot(y-x)) - f(x)}{\lambda \cdot (y-x)} \leq \lim_{\lambda \to 0} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = \boxed{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}}$$

f konvex: $f(x+\lambda\cdot(y-x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x))$

$\Downarrow$

$$\frac{f(x+\lambda\cdot(y-x)) - f(x)}{\lambda} \leq f(y) - f(x)$$

analog:

$$f'(y) = \lim_{z \to y} \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$

$$\vdots$$

$$\geq \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq f'(y)$$

$\Rightarrow f'$ mon. wachsend!!

f mon. wachsend

$\Downarrow$

$f' \geq 0$

---

f konvex

$\Downarrow$

f' mon. wachsend

$\Downarrow$

$f'' \geq 0$

Satz: f auf Intervall I stetig und im Inneren $\mathring{I}$ zweimal differenzierbar.

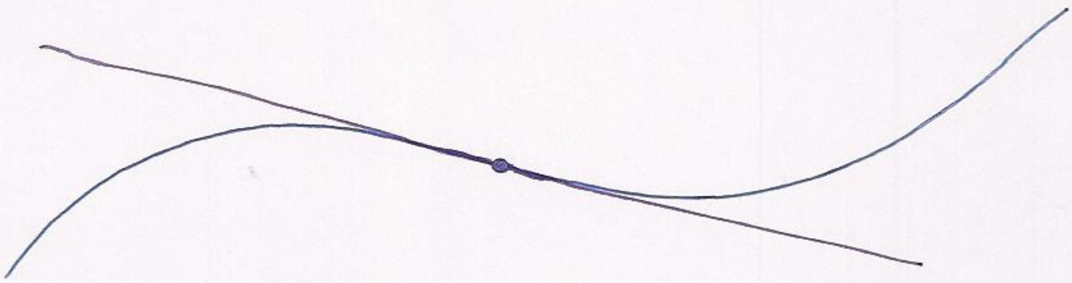
- f konvex auf I $\iff$ $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathring{I}$

- f konkav auf I $\iff$ $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathring{I}$

$f''(x) > 0 \Rightarrow f$ strikt konvex

$f''(x) < 0 \Rightarrow f$ strikt konkav

Def. x heißt Wendepunkt,
wenn f' in x relatives Extremum hat.



Satz: $f: D \to \mathbb{R}$ dreimal differenzierbar in D.

$$f''(x) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x) \neq 0$$

$$\Downarrow$$

f besitzt Wendepunkt bei x

f rel. Extrem

$\Updownarrow$

- $f' = 0$
- $f'' \neq 0$

---

f' rel. Extrem

$\Updownarrow$

f Wendepunkt bei x

$\Updownarrow$

$f'' = 0$

$f''' \neq 0$

Bsp.: $f(x) = (x+2)\cdot e^{-x}$

$$f' = e^{-x} - (x+2)\cdot e^{-x}$$

$$= e^{-x}\cdot(1-x-2) =$$

$$= -(x+1)\cdot e^{-x}$$

$$f'' = -e^{-x} + (x+1)\cdot e^{-x} =$$

$$= e^{-x}\cdot(-1+x+1) =$$

$$= x\cdot e^{-x}$$

$$f''' = e^{-x} - x\cdot e^{-x} = (1-x)\cdot e^{-x}$$

---

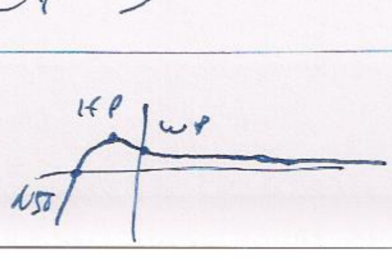
konvex $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$

$x\cdot \underbrace{e^{-x}}_{>0}$ $\Leftrightarrow$ $x \geq 0$ konvex

$x \leq 0$ $\Rightarrow$ konkav

$x=0$: $f'''(0) = \frac{1}{e} \neq 0$

$\Rightarrow$ WP.



$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{(x+2) \cdot e^{-x}}_{\text{"}\infty \cdot 0\text{"}} = ?$$

unbestimmte Form

Regel von de l'Hospital

Wie berechnet man Grenzwerte von "unbestimmten Formen"

$$"\frac{0}{0}", \; "\frac{\infty}{\infty}", \; "0\cdot\infty", \; "\infty-\infty", \; "1^{\infty}", \; "0^{0}"$$

mit Hilfe der Differentialrechnung?

Grundlage:

Satz (Verallgemeinerter Mittelwertsatz):

Fkt. f, g:
- stetig auf Intervall $[a, b]$
- differenzierbar auf (a, b)
- $g'(x) \neq 0 \;\forall x \in (a, b)$

$\Rightarrow \exists$ Zwischenstelle $\xi \in (a, b)$:

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Idee:

bew.:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$$

$$\downarrow$$

Mittelwertsatz!

Satz (Regel von de l'Hospital): $\text{"}\frac{0}{0}\text{"}$

f, g: · stetig auf $[a, b]$

· differenzierbar auf (a, b)

Sei $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$.

Vorausgesetzt sei, daß $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Beweis: Anwenden von verallg. Mittelwertsatz

---

analog: $\text{"}\frac{\infty}{\infty}\text{"}$

übrige: "$\infty - \infty$", "$0 \cdot \infty$", ...

$\Downarrow$

auf "$\frac{0}{0}$" ~~od~~ "$\frac{\infty}{\infty}$" zurückführen

"$\frac{0}{0}$"

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\tan x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{1}$$

$$= \frac{1}{\lim_{x\to 0} \cos^2 x} = \frac{1}{1} = 1 \checkmark$$

$$\lim_{x\to \infty} (x+2)\cdot e^{-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x+2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+2)'}{(e^x)'} =$$

"$\infty \cdot 0$"   "$\frac{\infty}{\infty}$"

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{\underbrace{\lim_{x\to\infty} e^x}_{\infty}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0} x^\alpha \cdot \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} =$$

$\alpha > 0$ | "$0\cdot(-\infty)$"   "$\frac{-\infty}{\infty}$"

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\alpha\cdot x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha}\cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{-\alpha}} =$$

$$= -\frac{1}{\alpha}\cdot \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp(\log(\,))$$

$$x = \frac{1}{y}$$

$$\lim_{y\to\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$$

"1^{∞}"

$$\lim_{x\to 0} e^{\log\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\cdot\log(1+x)} =$$

"$\frac{0}{0}$"

$$= e^{\lim_{x\to 0} \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right)} =$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1}} = e^{1} = e$$