Mathematik 2 für Informatiker — Übungsbeispiele

1) Man stelle den Definitionsbereich und den Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

$$(a)\quad z = x^2 - y^2, \qquad (b)\quad z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}.$$

2) Gegeben sei die Polynomfunktion $z = f(x,y) = xy^2 - 10x$. Man bestimme die Gleichungen ihrer Schnittkurven mit den senkrechten Ebenen $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ sowie die Höhenlinien für $z = z_0$ und skizziere alle drei Kurvenscharen. Mittels eines Computeralgebrasystems ermittle man eine 3D-Darstellung der gegebenen Funktion.

3) Gegeben sei die quadratische Form $q(\vec{x}) = q(x,y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2$ mit $b \in \mathbb{R}$. Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix A, sodaß $q(\vec{x}) = \vec{x}^T A\vec{x}$. Für welche Werte von b ist die Form positiv definit?

4) Eine Funktion $f(x_1,\ldots,x_n)$ heißt **homogen** vom Grad r, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1,\ldots,x_n)$ aus dem Definitionsbereich von f gilt:

$$f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^r f(x_1,\ldots,x_n).$$

Man beweise, daß die beiden Produktionsfunktionen $f(x,y) = cx^\alpha y^{1-\alpha}$ und $g(x,y) = (cx^\alpha + dy^\alpha)^{1/\alpha}$ (x Arbeit, y Kapital, c, d, α konstant) homogene Funktionen vom Homogenitätsgrad $r = 1$ sind.

5) Man prüfe nach, ob die Funktionen

$(a)\quad f(x,y,z) = x + (yz)^{1/2}$ (für $y, z \geq 0$) $\qquad (b)\quad f(x,y) = x^2 + y$

$(c)\quad f(x,y) = ax^by^c$ (mit $a,b,c \in \mathbb{R}$, $x,y > 0$)

homogen sind.

6–7) Man untersuche für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ den Grenzwert $\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t)$. Ist die Funktion $f(x,y)$ an $(0,0)$ stetig?

6)

$$f(x,y) = \frac{|y|}{|x|^3 + |y|} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 1$$

7)

$$f(x,y) = \frac{2y^2}{|x| + y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0$$

8) Sei

$$f(x,y) = \frac{x\cos\frac{1}{x} + y\sin y}{2x - y}$$

für $0 \neq x \neq 2y$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

9) Sei

$$f(x,y) = \frac{x + y\cos\frac{1}{y}}{x + y}$$

für $0 \neq y \neq -x$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

10–11) Man untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit (Hinweis: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ für $a, b \geq 0$.):

10)

$$f(x,y) = \frac{xy}{|x| + |y|} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0.$$

11)

$$f(x,y) = \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0.$$

12) Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = \cos(xy) + \frac{\sin z}{1+x^2+y^2}$. In welchen Punkten des Definitionsbereiches ist f stetig?

13) Zeigen Sie: Die Komposition stetiger Funktionen $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $g : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(I) \subseteq M$ is wiederum stetig.

14) Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

15) Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0,0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

16)

(a) Für die Funktion $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen f_x, f_y und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0, y_0) = (0.2, 0.3)$.

(b) Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x,y) = x^2\sin y + \cos(x + 2y)$.

17) Man prüfe nach, ob die gemischten partiellen Ableitungen f_{xy} und f_{yx} für die folgenden Funktionen $f(x,y)$ übereinstimmen:

$$(a)\quad f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}, \qquad (b)\quad f(x,y) = x^3e^{y^2}, \qquad (c)\quad f(x,y) = \sqrt{xy^3}.$$

18–19) Man bestimme den Definitionsbereich der Vektorfuntion $\mathfrak{x}(t)$, sowie die Ableitung $\mathfrak{x}'(t)$, wo sie existiert:

18)

$$\mathfrak{x}(t) = \left(\left(\frac{2t}{\sqrt{1-3t^2}}\right)^{\frac{5}{4}}, \sin\left(\frac{1}{1+t^2}\right)\right)$$

19)

$$\mathfrak{x}(t) = \left(\sin(1+\cos(t)), \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{1-t^2}}\right)$$

20–23) Man bestimme die partiellen Ableitungen:

20) $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{4x^2y^2}{1+x+y}\right)$ $\qquad$ 21) $f(x,y,z) = \dfrac{y + \sqrt{xz}}{1 + \sin^2(xyz)}$

22) $f(x,y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x^3y}{y-x^3}\right)$

23) $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x}+y^3z^2}{1+\cos^2(1+x)}$

24–27) Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\mathfrak{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

24) $\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x+y-z) \\ \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \end{pmatrix}$

25) $\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{y^2z} \\ x^yz^2 \end{pmatrix}$

26) $\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x-z}{y+1}} \\ z \cdot e^{-\frac{x}{y}} \end{pmatrix}$

27) $\mathfrak{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\operatorname{Arctan}(x+y^2)) \\ x\cos(y^2-\sqrt{x}) \cdot \tan(xyz) \end{pmatrix}$

28) Duch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Beschränkung von x und y auf die Werte $x = e^t$ und $y = e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$ liefert eine Kurve auf dieser Fläche. Man bestimme $\frac{dz}{dt}$ mittels Kettenregel und mache die Probe, indem man zuerst x und y in z einsetzt und anschließend nach dem Parameter t differenziert. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

29) Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}g(u,v) = u^2 - v$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}g(u,v) = -u + v^3$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt}g(2t, t^2+1)$.

30) Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u}g(u,v) = v\sin(uv)$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v}g(u,v) = u\sin(uv)$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt}g(t^2-1, 3t)$.

31) Mit Hilfe der Kettenregel berechne man den Wert der partiellen Ableitung der Funktion $F(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$ nach y an der Stelle $(0,0)$, wobei $f(x,y) = x^2+y^2$, $g(x,y) = \cos x + \sin y$ und $h(x,y) = x+y+1$ ist.

32) Man bestimme $\frac{dy}{dx}$ für folgende implizit gegebene Kurven:

(a) $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, für $x_0 = 0.5$, *(b)* $x^3 + y^3 - 2xy = 0$, für $x_0 = 1$.

33) Das elektrostatische Potential einer Punktladung Q im Koordinatenursprung ist durch

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

gegeben, für das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p} = (p,0,0)$ gilt:

$$\varphi_2(x,y,z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{px}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

(Dabei sind Q, p und ϵ_0 Konstante.) In beiden Fällen berechne man das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}$ nach der Formel $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$.

34) Man berechne das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung der Funktion $f(x,y) = e^{x-y}(x+1) + x\sin(x^2-y)$ an der Stelle $(x_0, y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$.

35) Man berechne das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung der Funktion $f(x,y,z) = e^{x^2yz}(x+yz+1) + x\cos(x^2-y-z)$ an der Stelle $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,\frac{\pi}{2})$.

36) Es sei $F(x,y) = \frac{2x+y}{y-2x}$, $x = 2u-3v$, $y = u+2v$. Man berechne $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ für $u = 2$, $v = 1$.

37) Es sei $F(x,y) = e^x \sin y + e^y \sin x - 1 = 0$. Man berechne $\frac{dy}{dx}$.

38) Es sei $F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1 = 0$. Man berechne y' und y''.

39) Man berechne y' und y'' im Punkt $(1,1)$ der Kurve $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$.

40) Es sei $F(x,y,z) = x^2(2x+3z) + y^2(3x-4z) + z^2(x-2y) - xyz = 0$. Man berechne z_x und z_y.

41) In welchen Punkten der Kurve $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ sind die Tangenten horizontal, in welchen vertikal?

42) Man ermittle die Gleichungen der Tangenten aus dem Punkt $(-1,1)$ an die Hyperbel $xy = 1$.

43) Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)$.

44) Man bestimme denjenigen Punkt auf der Ebene $z = x+y$, der von dem Punkt $(1,0,0)$ den kleinsten (euklidischen) Abstand hat.

45) Man bestimme die extremalen Werte der Funktion $f(x,y) = xy$ auf der Einheitskreislinie.

46) Man bestimme die Extrema von $f(x,y) = x^2 + 3xy + 2y^2$.

47) Man bestimme zu einer gegebenen Kugel einen eingeschriebenen Zylinder von maximaler Oberfläche.

48) Welcher Quader mit gegebener Oberfläche A besitzt maximales Volumen?

49) Für welche Werte wird $f(x,y,z) = xyz$ unter den Nebenbedingungen $xy + yz + zx = a$ und $x+y+z = b$ möglichst groß?

50) Man berechne die Ableitung von $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ im Punkt $P_0(3,2)$

(a) in Richtung der Koordinatenachsen,
(b) in Richtung von $(-1,-1)$, sowie
(c) in Richtung von $\operatorname{grad} f$.

51) In welcher Richtung erfolgt die maximale Änderung von

$$f(x,y,z) = x^2\sin(yz) - y^2\cos(yz)$$

vom Punkt $P_0(4, \frac{\pi}{4}, 2)$ aus und wie groß ist sie annähernd?

52) Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation der Funktion

$$f(x,y) = x^2(y-1) + xe^{y^2}$$

im Entwicklungspunkt $(1,0)$.

53) Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x,y) = 4(x-2)(y^2+10y) + 3x^3$.

54) Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $f(x,y) = xy(3-x-y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x,y) | x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3-x\}$.
(Anleitung: Man skizziere den Definitionsbereich D in der (x,y)-Ebene, bestimme dessen Rand und ermittle alle Funktionswerte auf dem Rand. Das absolute Maximum ist dann unter den relativen Maxima sowie unter den Funktionswerten am Rand von D zu suchen.)

55) Mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren berechne man die Extrema der Funktion $f(x,y) = x+y$ unter der Nebenbedingung $x^2+y^2 = 1$.

56) Die Herstellung eines Produks P unter Verwendung zweier Produktionsfaktoren A und B werde durch die Produktionsfunktion

$$\text{(NB)} \qquad y = f(x_1, x_2) = 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}}$$

beschrieben. Der Gewinn des Produzenten sei durch

$$G(x_1, x_2, y) = yp_0 - x_1p_1 - x_2p_2$$

gegeben. Man maximiere den Gewinn für die Preise $p_0 = 2$, $p_1 = 1$, $p_2 = 8$ und unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (NB), und ermittle die im Gewinnmaximum benötigten Faktormengen x_1, x_2, die Produktmenge y und den Unternehmergewinn G.

57) Man zeige, daß das Vektorfeld $\vec{f}(x,y) = (y^{\alpha-1}, (\alpha-1)xy^{\alpha-2})$ eine Stammfunktion besitzt und berechne diese.

58) Welches der folgenden Vektorfelder $\vec{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ist ein Gradientenfeld und wie lautet ggf. eine zu $\vec{f}$ gehörende Stammfunktion?

$(a)\quad (1,1,1), \qquad (b)\quad (-x,-y,-z), \qquad (c)\quad (2x,2y,0), \qquad (d)\quad (yz,xz,x^2).$

59) Man überprüfe, ob das Vektorfeld $\vec{f} = (yz, (x-2y)z, (x-y)y)$ eine Stammfunktion besitzt. Wenn ja, gebe man alle Stammfunktionen an.

60) Man berechne das Bereichsintegral $\iint_B (xy + x^2 - y^2)dxdy$ über dem Rechtecksbereich, welcher durch die Eckpunkte $A(-1,1)$ $B(5,1)$, $C(5,5)$ und $D(-1,5)$ bestimmt ist.

61) B sei der durch $x = 4$, $y = 1$ und $x + 2y = 2$ berandete beschränkte Bereich der (x,y)-Ebene. Man berechne $\iint_B 12x^2y^3dxdy$.

62–65) Berechnen Sie die folgenden Gebietsintegrale:

62) $\iint\limits_B \sin(x+y)\,dx\,dy$, $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$.

63) $\iint\limits_B \frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$, $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(2,2), (3,2), (3,3)$.

64) $\iint\limits_{x^2+y^2\leq 1} (x+y)^2\,dx\,dy$

65) $\iiint\limits_Z x\,dx\,dy\,dz$, wobei $Z \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder $Z = \{(x,y,z) | 1 \leq z \leq 2, 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$ ist.

66) $\iiint\limits_Z yz\,dx\,dy\,dz$, wobei $Z \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder $Z = \{(x,y,z) | 0 \leq z \leq 2, 1 \leq x^2+y^2 \leq 3\}$ ist.

67) Man bestimme die Bogenlänge der Kurve

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

68) Man bestimme die Bogenlänge der Kurve

$$x(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq \pi.$$

69) Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge:

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2} \end{pmatrix}, t \geq 0$$

70) Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(t+1)^{3/2} \\ t^2/2 \end{pmatrix}, t \geq 0$$

71) Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld $u(\underline{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ entlang des Weges $3y^2 = 4x$ von $(0,0)$ nach $(3,2)$ und entlang des Streckenzugs $(0,0) \to (3,0) \to (3,2)$.

72) Zeigen Sie, daß das Kurvenintegral $\int\limits_C (\cos x\,dx + e^{-y}\,dy + z^2\,dz)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es über einen Weg von $(-1,3,4)$ nach $(6,9,-2)$.

73) Zeigen Sie, daß das Kurvenintegral $\int\limits_C (e^{-x}\,dx + \cos y\,dy + z^5\,dz)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es über einen Weg von $(1,2,3)$ nach $(-4,-5,-6)$.

74) Man bestimme, falls möglich, ein Potential des Vektorfeldes

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y}{(x+y)^2} \\ -\frac{2x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}.$$

In welchen Gebieten $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Kurvenintegral über das Vektorfeld $u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wegunabhängig?

75) Man bestimme, falls möglich, ein Potential des Vektorfeldes

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+(x+y)^2} \\ -\frac{1}{1+(x+y)^2} \end{pmatrix}.$$

In welchen Gebieten $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Kurvenintegral über das Vektorfeld $u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wegunabhängig?

76) Man finde alle Lösungen der Differenzengleichung

$$(a)\quad 2x_{n+1} - 3x_n + 1 = 0 \quad (n \geq 0),$$
$$(b)\quad x_{n+1} - x_n + 7 = 0 \quad (n \geq 0).$$

77) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + 1 \quad (\text{für } n \geq 0)$$

und die partikuläre Lösung, die der Anfangsbedingung $x_0 = 6$ genügt.

78) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1+x_n}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

mit $x_0 \neq -1, -1/2, -1/3, \ldots$.
(Hinweis: Man benütze die Transformation $x_n = 1/y_n$.)

79) Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$x_{n+1} = 3^{2n}x_n + 3^{n^2}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

80) Beim Sortieren von n Zahlen durch "Direktes Einfügen" gilt für die Anzahl v_n der Vergleiche (im ungünstigsten Fall)

$$v_1 = 0 \quad \text{und} \quad v_n = v_{n-1} + n - 1, \quad n = 2,3,\ldots$$

und für die Zahl w_n der Wertzuweisungen

$$w_1 = 0 \quad \text{und} \quad w_n = w_{n-1} + n + 1, \quad n = 2,3,\ldots.$$

Warum? Man bestimme explizite Formeln für v_n und w_n und schätze deren Größenordnungen (in der $\mathcal{O}$-Notation) ab.

81) Man bestimme die Lösung der Differenzengleichung $x_{n+1} = \sqrt{2+x_n}$ (für $n \geq 0$) zum Anfangswert $x_0 = 0$ auf graphischem Weg, berechne die Gleichgewichtspunkte und überprüfe sie auf Stabilität.

82) Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichungen

$$\begin{aligned}(a)\quad & x_{n+2}-5x_{n+1}-6x_n=0,\\ (b)\quad & x_{n+2}-6x_{n+1}+12x_n=0,\\ (c)\quad & x_{n+2}-5x_{n+1}+6.25x_n=0.\end{aligned}$$

83) Man bestimme die Lösung nachstehender Differenzengleichung zu den vorgegebenen Anfangsbedingungen:

$$4x_{n+2}+12x_{n+1}-7x_n=36,\quad x_0=6,\quad x_1=3.$$

84) Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n=8+3^n,\quad n=0,1,2,\dots$$

85) Man bestimme die Anzahl aller 0-1-Folgen der Länge n, in denen es keine benachbarten Nullen gibt.
(Anleitung: Man stelle zunächst eine geeignete Rekursionsgleichung auf und bestimme dann deren Lösung.)

86) Man verwende die Methode der erzeugenden Funktionen zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differenzengleichung erster Ordnung $x_{n+1}-x_n+5=0$ für $n=0,1,2,\dots$.

87) Man finde die Lösung der Differenzengleichung zweiter Ordnung $x_{n+2}=5x_{n+1}-4x_n$ zu den Anfangsbedingungen $x_0=2$ und $x_1=5$ mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen.

88–93) Lösen Sie die Rekursion mit der Ansatzmethode:

88) $a_n+a_{n-1}+a_{n-2}=0$ $(n\geq 2)$, $a_0=3$, $a_1=-1$.

89) $a_n-a_{n-1}-a_{n-2}-a_{n-3}=0$ $(n\geq 3)$, $a_0=3$, $a_1=a_2=-1$.

90) $a_n=2a_{n-1}+2^{n-1}$ $(n\geq 1)$, $a_0=1$.

91) $a_n=2a_{n-1}+2^{2n-2}$ $(n\geq 1)$, $a_0=1$.

92) $a_n-a_{n-1}+a_{n-2}=0$ $(n\geq 2)$, $a_0=1$, $a_1=-1$.

93) $a_n=3a_{n-1}+3^{n-1}$ $(n\geq 1)$, $a_0=1$.

94) Lösen Sie die Rekursion aus Bsp. 90) mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

95) Lösen Sie die Rekursion aus Bsp. 91) mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

96) Lösen Sie die Rekursion aus Bsp. 93) mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

97–101) Stellen Sie eine Rekursion für die gesuchten Zahlen a_n auf und lösen Sie diese:

97) Es sei a_n die Anzahl aller Teilmengen der Menge $\{1,2,\dots,n\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.

98) Es sei a_n wie in Bsp. 97), jedoch gilt jetzt auch 1 als Nachfolger von n (zyklische Anordnung).

99) a_n sei die größte Anzahl von Teilen, in die die Ebene durch n Geraden zerlegt werden kann.

100) Es sei a_n die Anzahl aller Folgen der Länge n aus `0` und `1`, die keine zwei aufeinanderfolgenden Einser enthalten.

101) a_n sei die größte Anzahl von Teilen, in die eine Kugel durch n Großkreise zerlegt werden kann. (Ein Großkreis ist ein Kreis auf der Kugel, dessen Mittelpunkt gleich dem Kugelmittelpunkt ist.)

102) Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1}=2a_n+4b_n$, $b_{n+1}=3a_n+3b_n$ $(n\geq 0)$ mit den Startwerten $a_0=b_0=1$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

103) Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1}=3a_n+5b_n$, $b_{n+1}=4a_n+4b_n$ $(n\geq 0)$ mit den Startwerten $a_0=b_0=2$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

104) Sei $A(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_g(x)=\sum_{k\geq 0}a_{2k}x^{2k}$ aus.

105) Sei $A(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_u(x)=\sum_{k\geq 0}a_{2k+1}x^{2k+1}$ aus.

106) Sei $A(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und $b_n=\sum_{k=0}^{n-1}a_k$. Man drücke $B(x)=\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ mit Hilfe von $A(x)$ aus.

107) Sei $A(x)=\sum_{n\geq 0}a_nx^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und $b_n=\sum_{k=1}^{n+1}a_k$. Man drücke $B(x)=\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ mit Hilfe von $A(x)$ aus.

108–111) Man bestimme die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$:

108) $a_n=n^2+2^n$ **109)** $a_n=n+n3^n$

110) $a_n=n(n-1)+(-1)^n$ **111)** $a_n=n(-1)^n+2^{-n}$

112–113) Man bestimme mit Hilfe erzeugender Funktionen:

112) $s_n=\sum_{k=0}^n k(k-1)$ **113)** $s_n=\sum_{k=0}^n k^2$

114) Durch Einsetzen bestätige man, daß die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-6y=12\ln x$$

durch

$$y(x)=C_1x^3+\frac{C_2}{x^2}-2\ln x+\frac{1}{3},\quad C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

gegeben ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1)=2/3$, $y'(1)=-1$?

115) Man zeige, daß jede Funktion $z(x,y)=\frac{1}{a}x+C(y-\frac{b}{a}x)$, wo $C(u)$ eine willkürlich gewählte Funktion in einer Variablen ist, Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

ist. Wie lautet die Lösung zur Anfangsbedingung $z(x=0,y)=y^2+1$?

116) Man zeige: $u=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ genügt der Differentialgleichung $u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0$.

117) Man zeige: $u=\ln\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$ genügt der Differentialgleichung $u_{xx}+u_{yy}=0$.

118) Man zeige: $z=e^{-kn^2t}\sin nx$ genügt der Wärmeleitungsgleichung $z_t=kz_{xx}$.

119) Man löse die Differentialgleichung $y'=\frac{x}{x-y}$ mit der Isoklinenmethode.

120) Man berechne für $y'=x+y^2$ und die Anfangsbedingung $y(0)=1$ mit dem Polygonzugverfahren die Werte $y(0,1)$ und $y(0,2)$.

121) Mit der Methode der sukzessiven Approximation berechne man für $y'=x-y^2$ und $y(0)=1$ den Wert von $y(0,1)$ auf 3 Dezimalen genau.

122–124) Man löse die Differentialgleichungen durch Trennung der Veränderlichen.

122) $4x\,dy-y\,dx=x^2\,dy$

123) $(1+2y)\,dx-(4-x)\,dy=0$

124) $\cos y\,dx+(1-e^{-x})\sin y\,dy=0$ (für $x=0$ sei $y=\pi/2$)

125–128) Man löse die exakten Differentialgleichungen.

125) $(x+y+1)\,dx-(y-x+3)\,dy=0$

126) $(2xye^{x^2y}+y^2e^{xy^2}+1)\,dx+(x^2e^{x^2y}+2xye^{xy^2}-2y)\,dy=0$

127) $(4x^3y^3+\frac{1}{x})\,dx+(3x^4y^2-\frac{1}{y})\,dy=0$

128) $(\cos y+y\cos x)\,dx+(\sin x-x\sin y)\,dy=0$

129–130) Man löse mittels integrierendem Faktor:

129) $(x-y^2)\,dx+2xy\,dy=0,\ M=x^{-2}$.

130) $y(3-5x^2y)\,dx+x(2-3x^2y)\,dy=0,\ M=x^2y$.

131–134) Man löse die homogenen Differentialgleichungen.

131) $(2x+3y)\,dx+(y-x)\,dy=0$

132) $(x\sin\frac{y}{x}-y\cos\frac{y}{x})\,dx+x\cos\frac{y}{x}\,dy=0$

133) $(x^2+y^2)\,dx+xy\,dy=0$ (für $x=1$ sei $y=-1$)

134) $(x\sqrt{x^2+y^2}-y)\,dx+(y\sqrt{x^2+y^2}-y)\,dy=0$

135–141) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe:

135) $y'+\frac{1}{1-x}y=x^2,\ y(0)=1$

136) $y'+\frac{1}{1+2x}y=2x-3,\ y(0)=2$

137) $x^2y''-5xy'+5y=0$, wobei $y_1(x)=x^3$ bekannte Lösung ist.

138) $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$, wobei $y_1(x)=x$ und $y_2(x)=x^2$ bekannte Lösungen sind.

139) $y''-y=4e^x$

140) $y''+7y'+6y=\cosh(x)$

141) $y''+4y'+4y=e^{-2x}$

142–155) Man löse die Differentialgleichungen.

142) $xy'-y=x^3+3x^2-2x$

143) $y'+\frac{y}{x}-e^x=0$

144) $y'+2(\cot x)y+\sin 2x=0$

145) $y'+y\cot x=5e^{\cos x}$ (für $x=\pi/2$ sei $y=-4$)

146) $y'''-5y''+8y'-4y=e^{2x}$

147) $y''-2y'=e^x\sin x$

148) $y''+y=\frac{1}{\cos x}$ (mittels Variation der Konstanten)

149) $y''-6y'+9y=\frac{e^{3x}}{x^2}$ (mittels Variation der Konstanten)

150) $x^2y''+3xy'+y=0$

151) $x^2y''-xy'+y=x$

152) $y'=-\frac{1}{x}y+\frac{\log x}{x}y^2$

153) $y'+2xy=2x^3y^3$

154) $y'=y^2+(1-2x)y+(1-y+x^2)$ $(y_1=x)$

155) $x^2y'=x^2y^2+xy+1$ $(y_1=-x^{-1})$

156) Man ermittle das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y'=\frac{y}{x}$ und überlege, ob es durch jeden Punkt der (x,y)-Ebene genau eine Lösung der Gleichung gibt.

157) Man löse die homogene lineare Differentialgleichung $y'-y\tan x=0$.

158) Man löse die inhomogene lineare Differentialgleichung $xy'+y=x^2+3x+2$.

159) Man bestimme die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'+y\cos x=\sin x\cos x$ zur Anfangsbedingung $y(0)=1$.

160) Vom neuesten Modell eines Mobiltelefonproduzenten werden im Weihnachtsgeschäft 3000 Stück abgesetzt, nach 12 Monaten sind davon nur mehr 2820 Stück in Betrieb. Unter der Annahme, daß die monatliche Ausscheidungsrate proportional zur Nutzungsdauer ist, bestimme man die Anzahl $y(t)$ der in Betrieb stehenden Mobiltelefone (von den ursprünglich 3000 Stück) in Abhängigkeit von ihrer Verwendungsdauer t, sowie die längste Nutzungsdauer.

161) Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$(a)\quad y''-8y'-20y=0,$$
$$(b)\quad y''+8y'+16y=0,$$
$$(c)\quad y''-8y'+25y=0.$$

162) Man bestimme die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y''+2y'+2y=0$ zu den Anfangsbedingungen $y(0)=1$ und $y'(0)=0$.

163) Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''-y'-2y=x$.

164) Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y'=\Big(\frac{8y}{y+1}-y-1\Big)y$$

und überprüfe sie auf Stabilität.

165–167) Man bestimme mit Hilfe der Bisektion auf drei Dezimalstellen genau die positive Nullstelle der Funktion $f(x)$ im angegebenen Intervall I:

165) $f(x)=\sin x-\frac{x}{2},\ I=[\pi/2,\pi]$.

166) $f(x)=\cos x-x,\ I=[0,\pi/2]$.

167) $f(x)=(\tan x)^2-x,\ |x|<\frac{\pi}{4}$

168) Man zeige, daß die Funktion $\varphi(x)=x-e^{-x}+\cos x$ eine kontrahierende Abbildung des Intervalls $[1.2,1.3]$ in sich ist, und berechne den (einzigen) Fixpunkt x^* dieser Funktion im angegebenen Intervall.

169) Gesucht ist eine in der Nähe von

$$(a)\quad x_0=3,\qquad \text{bzw.}\qquad (b)\quad x_0=-3$$

gelegenen Nullstelle der Funktion $f(x)=e^{-x}+x^2-10$.

170) Nach welcher Zeit t (in Stunden) erreichen die Betriebskosten

$$B(t)=10.45t+0.0016t^2+17200(1-e^{-0.0002t})$$

eines Netzwerkrouters den Anschaffunspreis $A=100.000,-$ € ? Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

(Anleitung: Man bilde die Funktion $f(t) = B(t) - A$, untersuche deren Monotonieverhalten und bestimme schließlich die gesuchte Nullstelle mit Hilfe des Newton-Verfahrens.)

171) Man bestimme die Lösungsfolge der beim "Babylonischen Wurzelziehen" auftretenden Iteration

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(wobei $a > 0$, $x_0 > 0$ ist) auf graphischem Weg und zeige, daß stets

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq \sqrt{a}$$

gilt, d.h., die Iterationsfolge (x_n) ist ab $n = 1$ monoton fallend und nach unten durch $\sqrt{a}$ beschränkt.

172) Man zeige: Für $a \neq 0$ konvergiert die Iterationsfolge (x_n) gemäß $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ mit $\frac{1}{2a} < x_0 < \frac{3}{2a}$ gegen den Fixpunkt $x^* = \frac{1}{a}$. Diese Iteration stellt somit ein Verfahren zur Division unter ausschließlicher Verwendung von Multiplikationen dar.

173) Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -0.35x_1 \quad +1.5x_2 \quad +122.2x_3 &= 126 \\ 105.7x_1 \quad -440.9x_2 \quad -173.7x_3 &= -1285 \\ 21.5x_1 \quad -101.8x_2 \quad +33.4x_3 &= -229 \end{aligned}$$

mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens (a) ohne Pivotisierung, (b) mit Pivotisierung bei einer Rechengenauigkeit von 4 signifikanten Stellen.

174) Man vergleiche die Lösungen der beiden linearen Gleichungssysteme $A\vec{x} = \vec{b}_1$, $A\vec{x} = \vec{b}_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3.9 & -10.7 \\ -9.3 & 25.5 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} -290 \\ 690 \end{pmatrix}, \quad \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -291 \\ 689 \end{pmatrix}.$$

Was kann daraus geschlossen werden?

175) Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -x_1 \quad +5x_2 \quad -2x_3 &= 3 \\ x_1 \quad +x_2 \quad -4x_3 &= -9 \\ 4x_1 \quad -x_2 \quad +2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

unter Anwendung des Gesamtschrittverfahrens von Jacobi, wobei man zunächst die einzelnen Gleichungen derart umordne, daß das entstehende System das Zeilensummenkriterium erfüllt.

176) Man bestimme die Lösung des Gleichungssystems aus Aufgabe 175) mit Hilfe des Einzelschrittverfahrens von Gauß-Seidel.

177) Man zeige: Die Anzahl der Punktoperationen zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten beträgt

(a) $(n^2 - 1)n! + n$ bei Anwendung der Cramerschen Regel,
  (Hinweis: Die Auswertung einer $n \times n$-Determinante erfordert $(n-1)n!$ Multiplikationen.)

(b) $\frac{n}{3}(n^2 + 3n - 1)$ beim Eliminationsverfahren von Gauß,

(c) n^2 pro Schritt für das Iterationsverfahren von Jacobi oder Gauß-Seidel.

178) Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) seit dem Jahr 1950 wieder:

Jahr t	1950	1960	1970	1980	1990	2000
Bevölkerung $f(t)$	2.5	3	3.6	4.4	5.3	?

Man finde eine Trendfunktion der Form $g(t) = ce^{at}$ und extrapoliere die Bevölkerungszahl für das Jahr 2000.

(Hinweis: Man bestimme die Ausgleichsgerade für die Wertepaare $(t, \ln g(t))$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.)

179) Der Gebrauchswert einer Maschine betrage nach zwei Jahren noch 50%, nach vier Jahren noch 25% des Anschaffungspreises. Man gebe ein Polynom $p(t)$ 2. Grades als Funktion der Nutzungsdauer t an, das mit diesen empirischen Daten übereinstimmt und für $t = 0$ den Wert 100 (Neuwert mit 100%) annimmt. Ferner vergleiche man die Erfahrungswerte von 70% Gebrauchtwert nach einem Jahr und 35% nach drei Jahren mit den entsprechenden p-Werten.

180) Man bestimme das Interpolationspolynom dritten Grades zu den Interpolationsstellen $(0, 180)$, $(2, 240)$, $(4, 320)$ und $(6, 360)$ durch Lagrange-Interpolation.

181) Man löse das Interpolationsproblem aus Aufgabe 180) unter Anwendung des Newtonschen Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Funktionswerte des Interpolationspolynoms an den Stellen $x = 1, 3, 5$?