Aufgabe 4 (25%)

Eine Firma erzeugt Gut A und beherrscht den Markt als Monopolist. Die Abhängigkeit der Produktionsmenge x_A von den Faktoreinsatzmengen r_1 und r_2 der Rohstoffe 1 und 2 ist durch folgende Cobb-Douglas Produktionsfunktion charakterisiert:

$$x_A = f(r_1, r_2) = 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{\frac{2}{5}} \cdot r_2^{\frac{3}{5}}$$

Rohstoff 1 kostet EUR 4,00 pro Einheit, Rohstoff 2 kostet EUR 24,00 pro Einheit. Eine Marktstudie ergibt, dass bei einem Preis von EUR 180 pro Einheit des Gutes A ein Absatz von 5 Einheiten erzielt werden kann. Bei einem Preis von EUR 80 pro Einheit lassen sich hingegen 25 Einheiten verkaufen. Die Preis-Absatz-Relation ist linear.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

a) Die linearisierte Preis-Absatz-Funktion für das Gut A lautet $p = 100 - 20x_A$

b) Der Expansionspfad der optimalen Produktion ist $4r_2 = r_1$

c) Die Kostenfunktion der Produktion lautet $K(x) = 5x_A$.

d) Die gewinnoptimale Ausbringung ist $x = 10$ Einheiten.

e) Die gewinnoptimale Preis ist EUR 105 pro Einheit.

f) Der Rohstoffbedarf im Gewinnoptimum beträgt $r_1 = 5, r_2 = 20$.

Aufgabe 4 (25 %): b,c,e

Eine Firma erzeugt Gut A und beherrscht den Markt als Monopolist. Die Abhängigkeit der Produktionsmenge x_A von den Faktoreinsatzmengen r_1 und r_2 der Rohstoffe 1 und 2 ist durch folgende Cobb-Douglas Produktionsfunktion charakterisiert:

$$x_A = f(r_1, r_2) = 2^{(11/5)} r_1^{(2/5)} r_2^{(3/5)}.$$

Rohstoff 1 kostet EUR 4 pro Einheit, Rohstoff 2 kostet EUR 24 pro Einheit. Eine Marktstudie hat ergeben, dass bei einem Preis von EUR 180 pro Einheit des Gutes A ein Absatz von 5 Einheiten erzielt werden kann. Bei einem Preis von EUR 80 pro Einheit lassen sich hingegen 25 Einheiten verkaufen. Die Preis-Absatz-Relation ist linear.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (drei richtig):

a) Die linearisierte Preis-Absatz-Funktion für das Gut A lautet $p = 100 - 20x_A$.

b) Der Expansionspfad der optimalen Produktion ist $4r_2 = r_1$.

c) Die Kostenfunktion der Produktion lautet $K(x) = 5x_A$. $K = 4 x_1 + 24 x_2$

d) Die gewinnoptimale Ausbringung ist $x = 10$ Einheiten.

e) Die gewinnoptimale Preis ist EUR 105 pro Einheit.

f) Der Rohstoffbedarf im Gewinnoptimum beträgt $r_1 = 5, r_2 = 20$.

11/5 2/5 3/5

Lösungsversuch von Bbob:

Kostenfunktion:

$$\mathrm{K} = q_1 r_1 + q_2 r_2$$

$$\mathrm{K} = q_1 r_1 + q_2 r_2$$

Angabe: Rohstoff 1 kostet EUR 4,00 pro Einheit, Rohstoff 2 kostet EUR 24,00 pro Einheit.

$$\mathrm{K} = 4r_1 + 24r_2$$

Grenzproduktivität:

$$MP_1 = \frac{\partial f}{\partial r_1} = \frac{2}{5} \cdot 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{-\frac{3}{5}} \cdot r_2^{\frac{3}{5}}$$

$$MP_2 = \frac{\partial f}{\partial r_2} = \frac{3}{5} \cdot 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{\frac{2}{5}} \cdot r_2^{-\frac{2}{5}}$$

Lagrangefunktion:

$$L(\lambda, r_1, r_2) = f(r_1, r_2) + \lambda(\mathrm{K} - q_1 r_1 - q_2 r_2) = 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{\frac{2}{5}} \cdot r_2^{\frac{3}{5}} + \lambda(\mathrm{K} - 4r_1 - 24r_2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \mathrm{K} - 4r_1 - 24r_2$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_1} = \frac{2 \cdot 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_2^{\frac{3}{5}}}{5 \cdot r_1^{\frac{3}{5}}} - 4\lambda$$

$$\frac{\partial L}{\partial r_2} = \frac{3 \cdot 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{\frac{2}{5}}}{5 \cdot r_2^{\frac{2}{5}}} - 24\lambda$$

$$\frac{MP_1}{q_1} = \frac{MP_2}{q_2} = \lambda$$

Berechnung des Expansionspfads:

$$\frac{\frac{2}{5} \cdot 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{-\frac{3}{5}} \cdot r_2^{\frac{3}{5}}}{4} = \frac{\frac{3}{5} \cdot 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{\frac{2}{5}} \cdot r_2^{-\frac{2}{5}}}{24}$$

$$24 \cdot \frac{2}{5} \cdot 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{-\frac{3}{5}} \cdot r_2^{\frac{3}{5}} = 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{\frac{2}{5}} \cdot r_2^{-\frac{2}{5}}$$

$$24 \cdot \frac{2}{5} \cdot {}^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{-\frac{3}{5}} \cdot r_2^{\frac{3}{5}} = 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{\frac{2}{5}} \cdot r_2^{-\frac{2}{5}}$$

$$24 \cdot \frac{2}{5} \cdot r_2 = 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot r_1 \cdot r_1^{-\frac{3}{5}}$$

$$24 \cdot \frac{2}{3} \cdot r_2 = 4 \cdot r_1$$

$$24 \cdot \frac{2}{3} \cdot r_2 = 4 \cdot r_1$$

$$24 \cdot \frac{2}{3} \cdot r_2 = 4 \cdot r_1$$

$$\boldsymbol{4r_2 = r_1}$$

Berechnung der Kostenfunktion:

$x_A = f(r_1, r_2) = 2^{\frac{11}{5}} \cdot r_1^{\frac{2}{5}} \cdot r_2^{\frac{3}{5}}$

$x_A = f(r_1, r_2) = 2^{\frac{11}{5}} \cdot (4r_2)^{\frac{2}{5}} \cdot r_2^{\frac{3}{5}}$

$= 2^{\frac{11}{5}} \cdot 4^{\frac{2}{5}} \cdot r_2^{\frac{2}{5}} \cdot r_2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{11}{5}} \cdot 4^{\frac{2}{5}} \cdot r_2 = 2^3 \cdot r_2$

$x_A = 8 \cdot r_2$

$r_2 = \frac{x_A}{8}$

$x_A = 8 \cdot \frac{r_1}{4}$

$r_1 = \frac{x_A}{2}$

$\mathrm{K} = 4r_1 + 24r_2$

$\mathrm{K} = 4\frac{x_A}{2} + 24\frac{x_A}{8}$

$\mathrm{K} = 2x_A + 3x_A$

$\mathrm{K} = 5x_A$

$\mathrm{K}(x_A) = 5x_A$

Preis-Absatz-Funktion:

$p = 180 \; bei \; x = 5$

$p = 80 \; bei \; x = 25$

Gleichungssystem mit 2 Variablen einfach lösen.

$p(x) = x * (-5) + 205$

Gewinnfunktion:

$\mathrm{G}(x_A) = U - K$

$\mathrm{G}(x_A) = p * x_A - 5x_A$

$\mathrm{G}(x_A) = (x_A * (-5) + 205) * x_A - 5x_A$

$\mathrm{G}(x_A) = -5x_A^2 + 200x_A$

$$\mathrm{G}(x_A) = -5x_A^2 + 200x_A \rightarrow max$$

$$-10x_A + 200 = 0$$

$$x_A = -\frac{200}{-10}$$

$$x_A = 20$$