Lineare Algebra & Geometrie 1 **Technische Universität Wien**

W2019: VO104.504, UE104.274 Diskrete Mathematik & Geometrie

Informationen zur Lehrveranstaltung

Termine:
Mi 08:30–11:00 HS 8 (VO, U Hertrich-Jeromin)
Do 08:30–10:00 HS 8 (VO, U Hertrich-Jeromin)
Mo 14:00–15:00 HS 6 (Konversatorium, N Meyer)
Mi 11:15–12:45 ZS 1 (UE, M Goldstern)
Mi 11:15–12:45 ZS 3 (UE, M Behrisch)
Mi 13:00–14:30 ZS 1 (UE, M Goldstern)
Mi 13:00–14:30 ZS 3 (UE, G Szewieczek)
Mi 14:45–16:15 ZS 1 (UE, M Goldstern)
Mi 14:45–16:15 ZS 3 (UE, B Gittenberger)
Mi 16:30–18:00 ZS 3 (UE, U Hertrich-Jeromin)

Sekretariat: B Slama ⟨sekr@geometrie.tuwien.ac.at⟩ Sprechzeiten DA08 K02, Mo–Do 9:00–11:00

Aufgaben: Wöchentlich werden Aufgabenblätter ausgegeben (normalerweise am Mittwoch).
Die Aufgaben sind zur Übung der folgenden Woche zu lösen.
Studierende geben in TUWEL an, welche Aufgaben sie gelöst haben.
Sie präsentieren dann ihre Lösungen in der Übung und gegebenenfalls werden schriftliche Ausarbeitungen der Lösungen eingesammelt und bewertet.

Bewertung: Die Gesamtwertung in der Übung setzt sich aus der Anzahl der gelösten Aufgaben (Kreuzerlpunkte) und den Bewertungen der Präsentationen bzw schriftlichen Ausarbeitungen (Bewertungspunkte) zusammen.

Zum *positiven Absolvieren der Übung* müssen mindestens 65% der Kreuzerlpunkte und 50% der Bewertungspunkte erreicht werden.

Zum *positiven Absolvieren der Vorlesung* muss eine Prüfung bestanden werden, zu der Sie sich über TISS anmelden. Diese Prüfung besteht aus einem schriftlichen und einem mündlichen Teil; die Prüfung gilt als bestanden, wenn Sie in jedem Teil mindestens 50% der jeweils erreichbaren Punkte erhalten haben.

Literatur: Es wird empfohlen, dass Sie parallel zur Vorlesung (mindestens) ein Lehrbuch lesen. Keines der folgenden Bücher ersetzt jedoch die Vorlesung oder "deckt den Vorlesungsstoff" (in einer zum Selbststudium geeigneten Weise) ab!

S Axler: *Linear Algebra Done Right*; UTM Springer, New York (1997)

T tom Dieck: *Lineare Algebra*; Skriptum, Univ Göttingen (2014)

D Ferus: *Lineare Algebra*; Skriptum, TU Berlin (2001)

H Havlicek: *Lineare Algebra für Technische Mathematiker*; Heldermann, Lemgo (2012)

K Jänich: *Linear Algebra*; UTM Springer, Berlin (2008)

J Strang: *Linear Algebra and Learning from Data*; CUP, Wellesley (2019)

Besuchen Sie auch die Bibliothek und sehen sich andere Bücher zur Linearen Algebra an — und finden Sie eines, das Ihnen gut gefällt bzw mit dem Sie gerne arbeiten.

Logbuch: http://www.dmg.tuwien.ac.at/hertrich-jeromin/tea/2019lag1.txt

Kurzskript: http://www.dmg.tuwien.ac.at/hertrich-jeromin/tea/2019lag.pdf

Aufgabenblätter: http://www.dmg.tuwien.ac.at/hertrich-jeromin/tea/2019lag1.pdf

Lineare Algebra & Geometrie 1 **Technische Universität Wien**

W2019: VO104.504, UE104.274 Diskrete Mathematik & Geometrie

Mathe Erste Hilfe

Das Griechische Alphabet

A	α	alpha	H	η	eta	N	ν	nu	T	τ	tau
B	β	beta	Θ	θ, ϑ	theta	Ξ	ξ	xi	Υ, Υ	υ	upsilon
Γ	γ	gamma	I	ι	iota	O	o	omicron	Φ	ϕ, φ	phi
Δ	δ	delta	K	κ	kappa	Π	π	pi	X	χ	chi
E	ϵ, ε	epsilon	Λ	λ	lambda	P	ρ, ϱ	rho	Ψ	ψ	psi
Z	ζ	zeta	M	μ	mu	Σ	σ	sigma	Ω	ω	omega

Logische Symbole

$\forall$, $\exists$ *All-Quantor* ("für alle ...") und *Existenz-Quantor* ("existiert (mindestens) ein..."), Modifikation: $\exists!$ oder $\exists^1$ ("existiert genau ein...");

$\neg$ *logische Verneinung*: die Aussage $\neg A$ ist genau dann wahr (w), wenn A falsch (f) ist;

$\wedge$, $\vee$ *logisches und* und *logisches oder* zur Verknüpfung zweier Aussagen A und B;

$\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ *Implikation* ("aus A folgt B") und *Äquivalenz* ("A genau dann, wenn B") zweier Aussagen.

Mengensymbole

$\in$ *Element-Relation* ("...ist Element aus...");

$\subset$, $\supset$ *Teilmenge* bzw *Obermenge* (e.g., $X \subset Y \Leftrightarrow \forall x : (x \in X \Rightarrow x \in Y)$;

$\cap$, $\cup$ *Schnittmenge* und *Vereinigungsmenge* (e.g., $X \cap Y = \{x \,|\, x \in X \wedge x \in Y\}$);

$\setminus$ *Differenzmenge* (i.e., $X \setminus Y = \{x \,|\, x \in X \wedge x \notin Y\}$; Achtung: *nicht* X/Y!).

Beispiele: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ (die Menge der *natürlichen Zahlen*); $x \in X \cup Y \;\Leftrightarrow\; (x \in X \vee x \in Y)$.

Abbildungen $f : X \to Y$ bezeichnet eine *Abbildung* gdw $\forall x \in X \exists! y \in Y : y = f(x)$; sie ist

(i) *injektiv*, falls $\forall x, x' \in X : f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;

(ii) *surjektiv*, falls $\forall y \in Y \exists x \in X : f(x) = y$;

(iii) *bijektiv*, falls $\forall y \in Y \exists! x \in X : f(x) = y$.

Gruppen Eine *Gruppe* ist eine Menge G mit einer Operation $\circ$, so dass

(i) *Assoziativität*: $\forall f, g, h \in G : (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$;

(ii) Existenz *neutrales Element*: $\exists e \in G \forall g \in G : e \circ g = g$;

(iii) Existenz *inverse Elemente*: $\forall g \in G \exists g^{-1} \in G : g^{-1} \circ g = e$.

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heisst *abelsch* oder *kommutativ*, falls zusätzlich gilt $\forall f, g \in G : f \circ g = g \circ f$.

Beispiel: Die *symmetrische Gruppe* $G = \{f : M \to M \,|\, f \text{ bijektiv}\}$ aller *Permutationen* einer Menge M.

Körper (Zahlbereiche) Ein *Körper* ist eine Menge K mit zwei Operationen $+$ und $\cdot$, so dass

(i) $(K, +)$ ist eine (additive) abelsche Gruppe (mit $e = 0$);

(ii) $(K^\times, \cdot\,)$ ist eine (multiplikative) abelsche Gruppe (mit $e = 1$);

(iii) die *Distributivgesetze* gelten:

$$\forall x, y, z \in K : \begin{cases} x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \\ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z. \end{cases}$$

Beispiel: Mit $x \sim y :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y - x = pk$ (p prim) ist $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/\sim$, versehen mit den von $\mathbb{Z}$ "geerbten" Operationen, ein Körper mit Charakteristik $Char(\mathbb{Z}_p) = p$.

Lineare Algebra & Geometrie 1 **Technische Universität Wien**

W2019: VO104.504, UE104.274 Diskrete Mathematik & Geometrie

Aufgabenblatt 1 (Kreuzerl bis Di 15 Okt 15:05)

Aufgabe 1:a. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. (Wenn Ihnen die Angabe unklar vorkommt, formalisieren Sie zunächst Ihre Interpretation der Angabe mit Hilfe von Quantoren und anderen logischen Symbolen.)

(i) Eine Inverse einer Abbildung ist gleichzeitig Rechts- und Linksinverse.

(ii) Eine Abbildung kann mehrere Linksinverse haben.

(iii) Wenn $f \circ g$ injektiv ist, dann ist f injektiv.

(iv) Wenn $f \circ g$ surjektiv ist, dann ist f surjektiv.

Aufgabe 1:b. Für alle $n \in \mathbb{N}^\times$ sei $S_n := \mathrm{Sym}(\{1, \dots, n\})$.

(i) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente von S_n für alle n.

(ii) Geben Sie für $n = 1, 2, 3$ die Elemente von S_n an, sowie für alle $f, g \in S_n$ die Funktion $f \circ g$.

Aufgabe 1:c.

(i) Wie viele Abbildungen $f \in \mathrm{Sym}(\{1, 2, 3, 4\})$ gibt es, die $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ und $f(3) \neq 1$ erfüllen?

(ii) Wählen Sie eine Abbildung f, die die obigen Bedingungen erfüllt, berechnen Sie f^{-1}, und zeigen Sie, dass sich sowohl f als auch f^{-1} als Komposition von Transpositionen (endlich vielen, möglicherweise mehr als zwei) schreiben lassen.

Aufgabe 1:d. Für jede natürliche Zahl n definieren wir $K_n := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists a, b \in \mathbb{Q} : x = a + b\sqrt{n}\}$. Zeigen Sie, dass jede dieser Mengen ein Körper ist.
(Hinweis: Der schwierigste Teil dieser Aufgabe ist der Nachweis, dass jedes Element von $K_n^\times$ ein multiplikatives Inverses hat. Vergewissern Sie sich, dass Sie in Ihrem Beweis nie eine Division durch 0 verwenden bzw. dass Sie nie einen Bruch mit Nenner 0 anschreiben. Nachdem Sie Ihren Beweis fertig formuliert haben, kontrollieren Sie noch, ob die Argumente in Ihrem Beweis auch in den Spezialfällen $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ zutreffen.)

Aufgabe 1:e. Ein Tupel $(K, +, *, n, e)$ heisst ein Körper, wenn $(K, +, n)$ und $(K \setminus \{n\}, *, e)$ kommutative Gruppen sind, und die Distributivgesetze $\forall x, y, z \in K : \begin{cases} x * (y + z) = (x * y) + (x * z) \\ (x + y) * z = (x * z) + (y * z) \end{cases}$ gelten.
Betrachte die Menge $K = \{0, 1\}$, und definiere $+, * : K \times K \to K$ als

$$x + y := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases} \qquad x * y := \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0 \vee y = 0 \\ 1 & \text{für } x = y = 1 \end{cases}$$

Zeige, dass $(K, +, *, 0, 1)$ ein Körper ist.

Aufgabe 1:f. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen für alle Körper K wahr sind, oder für mindestens einen Körper falsch.

(i) K hat unendlich viele Elemente.

(ii) Für alle $x \in K$ gilt $0_K \cdot x = 0_K$.

(iii) Für alle $x \in K$ gilt: Wenn $x = -x$, dann ist $x = 0_K$.

(iv) Für alle $x \in K \setminus \{0_K\}$ und für alle $y \in K$ gilt: Wenn $x \cdot y = 0_K$, dann $y = 0_K$.

Lineare Algebra & Geometrie 1 **Technische Universität Wien**

W2019: VO104.504, UE104.274 Diskrete Mathematik & Geometrie

Aufgabenblatt 2 (Kreuzerl bis Di 22 Okt 15:05)

Aufgabe 2:a. Zeigen Sie: Für jede Primzahl $p \in \mathbb{N}$ ist $\mathbb{Z}_p$ ein Körper. Stellen Sie die Additions- und Multiplikationstabellen von $\mathbb{Z}_5$ auf.

Aufgabe 2:b. Sei $F_4 := \{x + ye^{\frac{i\pi}{3}} \,|\, x, y \in \mathbb{Z}_2\}$ versehen mit der von $\mathbb{C}$ "geerbten" Addition und Multiplikation. Zeigen Sie: F_4 ist ein Körper mit $Char(F_4) = 2$ und $\#F_4 = 4 = 2^2$ Elementen und visualisieren Sie diesen Körper in der Gaussschen Zahlenebene.
[Hinweis (falls die Operationen unklar sind): Für $z = x + ye^{\frac{i\pi}{3}}, z' = x' + y'e^{\frac{i\pi}{3}} \in F_4$ interpretiere man z und z' als komplexe Zahlen, $z, z' \in \mathbb{C}$, berechne $z + z'$ bzw $z \cdot z'$ in $\mathbb{C}$ (vgl Analysis UE 1 Aufg 1); dann beobachte man (wieso?), dass die Resultate $z + z', z \cdot z' \in \{x + ye^{\frac{i\pi}{3}} \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\}$ und benutze die Definition von $\mathbb{Z}_2$, um ein Resultat in F_4 zu erhalten.]

Aufgabe 2:c. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) In einem Körper K gilt stets: $\forall x, y \in K : x \cdot (-y) = -(xy) = (-x) \cdot y$.

(ii) In einem Körper ist stets $(-1) \cdot x = -x$.

(iii) Gilt $1 = -1$ in einem Körper K, so ist $Char(K) = 2$.

(iv) Es gibt einen Körper K mit $Char(K) = 1$.

Aufgabe 2:d. Seien $I = \{1, \ldots, n\}$ und $X = (x_{ij})_{i,j \in I} \in K^{n \times n}$; zeigen Sie:

$$\forall Y \in K^{n \times n} : XY = YX \Leftrightarrow \exists x \in K \forall i, j \in I : x_{ij} = \delta_{ij} x.$$

Aufgabe 2:e. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Zu jedem $X \in K^{m \times n}$ existiert Y, so dass $XY \in K^{n \times n}$.

(ii) $\exists X \in K^{m \times n} \exists Y \in K^{n \times m} : XY = YX \Rightarrow m = n$.

(iii) Sei $1 \leq m \leq n$, dann gilt: $\forall X \in K^{m \times n} \exists Y \in K^{n \times m} : XY = E_m$.

(iv) Sei $m > n \geq 1$, dann gilt: $\exists X \in K^{m \times n} \exists Y \in K^{n \times m} : XY = E_m$.

Aufgabe 2:f. Zeigen Sie: Für $n \geq 2$ ist $\mathrm{Gl}(n)$ eine nicht abelsche Gruppe.

Aufgabenblatt 3 (Kreuzerl bis Di 29 Okt 15:05)

Aufgabe 3:a. Zeigen Sie: $C := \{\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\}$ ist mit Matrixaddition und -multiplikation ein Körper.

Aufgabe 3:b. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Für $A, B \in K^{n\times n}$ gilt $AB = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$.

(ii) $(K^{n\times n}, +)$ ist eine abelsche Gruppe.

(iii) $\mathrm{Gl}(n)$ ist mit der Matrixmultiplikation eine Gruppe.

(iv) $K^{n\times n}$ ist mit Matrixaddition und -multiplikation ein *Schiefkörper*, d.h., es gelten alle Körperaxiome bis auf die Kommutativität der Multiplikation.

Aufgabe 3:c. Zeigen Sie: Sind $AX = Y$ eine lineares Gleichungssystem mit $A \in K^{m\times n}$ und $Q \in \mathrm{Gl}(m)$, so liefert $A'X = Y'$ mit $A' := QA$ und $Y' := QY$ ein äquivalentes lineares Gleichungssystem.

Aufgabe 3:d. Beweisen Sie: Lässt sich $A \in K^{n\times n}$ durch Zeilenumformungen in die n-reihige Einheitsmatrix umformen, so ist $A \in \mathrm{Gl}(n)$.

Aufgabe 3:e. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender reeller linearer Gleichungssysteme:

$$\begin{array}{rrr} x_1 + 2x_2 & + 3x_4 = 3 \\ & x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{rrr} x_1 + 2x_2 & + 3x_4 = 4 \\ & x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 4 \end{array}$$

Aufgabe 3:f. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Ein lineares Gleichungssystem mit genau so vielen Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.

(ii) Gibt es in einem linearen Gleichungssystem mehr Gleichungen als Unbekannte, so ist das System nicht lösbar.

(iii) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat eine Lösung.

(iv) Ein lineares Gleichungssystem $AX = Y$ mit $A \in \mathrm{Gl}(n)$ hat stets eine eindeutige Lösung.

Aufgabenblatt 4 (Kreuzerl bis Di 5 Nov 15:05)

Aufgabe 4:a. Beweisen Sie, dass K^I ein Vektorraum ist.

Aufgabe 4:b. Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Der Nullvektor $0 \in V$ eines K-Vektorraums ist eindeutig.

(ii) Sei V ein K-Vektorraum und $v \in V$; dann gilt $v + v = 0 \Rightarrow v = 0$.

(iii) Ist I endlich, so kann K^I nur endlich viele Elemente enthalten.

(iv) Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bilden einen Vektorraum.

Aufgabe 4:c. Sei $A \in K^{m \times n}$. Zeigen Sie: $L_{A,0} \leq K^{n \times 1}$.

Aufgabe 4:d. Zeigen Sie: $X := \{f : \{0,1\} \to \mathbb{R} \,|\, f(0)f(1) = 0\} \subset \mathbb{R}^{\{0,1\}}$ ist kein Untervektorraum. Erklären Sie die Situation anhand einer Skizze.

Aufgabe 4:e. Beweisen Sie: Ist $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Unterräumen $U_i \leq V$ eines K-Vektorraumes V, so ist ihr Schnitt $U := \bigcap_{i \in I} U_i \subset V$ Untervektorraum von V.

Aufgabe 4:f. Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Ist $[S] = V$ und $U \leq V$ Unterraum mit $S \subset U$, so gilt $U = V$.

(ii) Für jede Teilmenge $S \subset V$ gilt $[[S]] = [S]$.

(iii) Eine Linearkombination ist wohldefiniert, weil $\forall v \in V : v\,0 = 0$.

(iv) $\forall x \in K : [\{x\}] = K$.

Aufgabenblatt 5 (Kreuzerl bis Di 12 Nov 15:05)

Aufgabe 5:a. Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in einem K-Vektorraum. Zeigen Sie: $(v_i)_{i\in I}$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $\{v_i \mid i \in I\}$ linear unabhängig ist und die Abbildung $i \mapsto v_i$ injektiv ist.

Aufgabe 5:b. Zeigen Sie: Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ in einem K-Vektorraum ist genau dann linear unabhängig, wenn $v_i \notin [(v_j)_{j\in I\setminus\{i\}}]$ für alle $i \in I$.

Aufgabe 5:c. Zeigen Sie: Jede Teilfamilie einer linear unabhängigen Familie ist linear unabhängig.

Aufgabe 5:d. Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Ein einzelner Vektor ist immer linear unabhängig.

(ii) Jede Familie ist eine Abbildung und gleichzeitig eine Menge.

(iii) Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ ist genau dann linear abhängig, wenn ihre Bildmenge $\{v_i \mid i \in I\}$ linear abhängig ist.

(iv) Ist $S \subset V$ linear unabhängig und $S' \subset S$, so ist S' linear unabhängig.

Aufgabe 5:e. Sei $E = \{v_1, \ldots, v_m\}$ Erzeugendensystem eines K-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass V eine Basis B mit $B \subset E$ besitzt.

Aufgabe 5:f. Entscheiden Sie, ob die Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Jeder Vektorraum ist ein Erzeugendensystem.

(ii) Jede linear unabhängige Familie ist Teil einer Basis.

(iii) Hat ein Vektorraum eine Basis mit unendlich vielen Elementen, so hat er kein endliches Erzeugendensystem.

(iv) Jeder Vektorraum besitzt eine Basis aus endlich vielen Vektoren.

Aufgabenblatt 6 (Kreuzerl bis Di 19 Nov 15:05)

Aufgabe 6:a. Seien V_1 und V_2 zwei endlich erzeugte K-Vektorräume. Zeigen Sie: $\dim V_1 \times V_2 = \dim V_1 + \dim V_2$.

Aufgabe 6:b. Sei I eine endliche Indexmenge und $J \subset I$. Geben Sie einen zum Unterraum $U_J \leq K^I$ der K-wertigen Funktionen mit Nullstellenmenge J,

$$U_J := \{f \in K^I \mid f|_J = 0\} \leq K^I,$$

komplementären Unterraum U' an und bestimmen Sie dessen Dimension.

Aufgabe 6:c. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Die Summe von Unterräumen ist die lineare Hülle ihrer Vereinigung.

(ii) Die Summe der Dimensionen zweier Unterräume ist die Dimension ihrer Summe.

(iii) Komplementäre Unterräume haben einen leeren Schnitt.

(iv) In $\mathbb{Z}_2^3$ hat jeder Unterraum einen eindeutigen Komplementärraum.

Aufgabe 6:d. Seien $A \in K^{m\times n}$ und $Y \in K^{m\times 1}$ so, dass $L_{A,Y} \neq \emptyset$. Zeigen Sie: $L_{A,Y} \in K^{n\times 1}/L_{A,0}$.

Aufgabe 6:e. Sei I eine endliche Indexmenge und $J \subset I$. Beschreiben Sie die Elemente des Quotientenraums K^I/U_J, wobei $U_J \leq K^I$ den Unterraum der K-wertigen Funktionen mit Nullstellenmenge J bezeichnet,

$$U_J := \{f \in K^I \mid f|_J = 0\} \leq K^I,$$

und bestimmen Sie die Dimension von K^I/U_J.

Aufgabe 6:f. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Eine Äquivalenzrelation ist nie eine Abbildung.

(ii) Für $g \in K^I$ definiert $g(v) = g(w)$ stets eine Äquivalenzrelation.

(iii) Die Menge $G(V)$ der Unterräume eines K-Vektorraums V bildet mit der Summe von Unterräumen eine abelsche Gruppe.

(iv) Die Menge $G(V)$ aller Unterräume eines Vektorraums V bildet mit der Produktbildung und $U^{-1} := V/U$ für $U \in G(V)$ eine Gruppe.

Aufgabenblatt 7 (Kreuzerl bis Di 26 Nov 15:05)

Aufgabe 7:a. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Jede lineare Abbildung ist additiv und homogen.

(ii) Ist V ein $\mathbb{C}$-Vektorraum und $f \in \mathrm{End}(V)$, so ist f auch $\mathbb{R}$-linear.

(iii) Der zu einer Matrix $X \in K^{m\times n}$ assoziierte Homomorphismus f_X hängt von den gewählten Basen ab.

(iv) Ist $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ invertierbar, so ist f^{-1} linear.

Aufgabe 7:b. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $U \leq W$ ein Untervektorraum.
Zeigen Sie: $f^{-1}(U) := \{v \in V \mid f(v) \in U\} \leq V$ ist ein Untervektorraum.

Aufgabe 7:c. $\mathbb{R}[x]_n \subset C^\infty(\mathbb{R})$ bezeichne den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen $x \mapsto p(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j a_j$ vom Grade $\deg p(x) \leq n$. Für $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}$ sei

$$f : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}^m, \;\; p(x) \mapsto (p(\xi_i))_{i=1,\ldots,m}$$

Zeigen Sie, dass f linear ist und bestimmen Sie $\ker f \leq \mathbb{R}[x]_n$.

Aufgabe 7:d. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Homomorphismen bilden Unterräume auf Unterräume ab.

(ii) Jede Selbstabbildung eines K-Vektorraumes, die Unterräume auf Unterräume abbildet ist ein Endomorphismus.

(iii) $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{rg}\, f = 0$.

(iv) $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ ist genau dann surjektiv, wenn das Bild $f(E)$ eines Erzeugendensystems $E \subset V$ ein Erzeugendensystem ist.

Aufgabe 7:e. Zeigen Sie, dass die zur Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ duale Basis von $(K^n)^*$ gebildet wird durch die *Auswertungsfunktionale*:

$$e_i^* : K^n \to K, \;\; (x_j)_{j=1,\ldots,n} \mapsto e_i^*((x_j)_{j=1,\ldots,n}) := x_i.$$

Aufgabe 7:f. Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum.
Geben Sie einen Isomorphismus $f \in \mathrm{Iso}(V, V^*)$ an. Gibt es noch andere?

Aufgabenblatt 8 (Kreuzerl bis Di 3 Dez 15:05)

Aufgabe 8:a. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$ und $(b_i)_{i\in J}$ eine Basis von $\ker f$. Zeigen Sie: Jede Ergänzung $(b_i)_{i\in I}$ zu einer Basis von V liefert eine Basis $(c_i)_{i\in I\setminus J} := (f(b_i))_{i\in I\setminus J}$ von $f(V)$.

Aufgabe 8:b. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Sind V und W isomorph, so gilt $\dim V = \dim W$.

(ii) Jeder injektive Endomorphismus ist ein Isomorphismus.

(iii) Ist $p \in \mathrm{End}(V)$ Projektion, so gilt $\forall v \in V : v + \ker p = p^{-1}(\{v\})$.

(iv) Ist $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$, so gilt $V/f(V) \cong \ker f$.

Aufgabe 8:c. Geben Sie ein Beispiel eines surjektiven, nicht bijektiven Endomorphismus an.

Aufgabe 8:d. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V,W)$; entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Ist $\dim W < \infty$, so folgt $\mathrm{rg}\, f < \infty$.

(ii) Ist f injektiv, so folgt $\dim W > \dim V$.

(iii) Ist f surjektiv, so folgt $\dim W \leq \dim V$.

(iv) Jeder injektive Endomorphismus ist ein Automorphismus.

Aufgabe 8:e. Sei $A \in K^{m\times n}$. Zeigen Sie: $\Delta^{(e_1,\ldots,e_m)}_{(e_1,\ldots,e_n)}(f_A) = A$.

Aufgabe 8:f. $\mathbb{R}[x]_n \leq \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bezeichne den $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynomfunktionen $x \mapsto p(x)$ vom Grade $\deg p(x) \leq n$,

$$\mathbb{R}[x]_n := \{x \mapsto p(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j a_j \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\},$$

und $B = (b_0, \ldots, b_n)$ seine Basis der Monome, $b_j(x) = x^j$. Seien $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{R}$ paarweise verschieden. Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\Delta^E_B(f)$, bzgl der Basis B und der Standardbasis E von $\mathbb{R}^m$, von

$$f : \mathbb{R}[x]_n \to \mathbb{R}^m, \;\; f(p(x))(i) := p(\xi_i) \;\text{ für }\; i = 1, \ldots, m.$$

Aufgabenblatt 9 (Kreuzerl bis Di 10 Dez 15:05)

Aufgabe 9:a. Seien $B = (b_1, \dots, b_n)$ und $C = (c_1, \dots, c_m)$ Basen der K-Vektorräume V bzw W und $\varphi \in \mathrm{Iso}(V, K^n)$ und $\psi \in \mathrm{Iso}(W, K^m)$ die zugehörigen Koordinatenabbildungen. Zeigen Sie, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & W \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\psi \\ K^n & \xrightarrow{f_X} & K^m \end{array}$$

mit $X := \Delta_B^C(f)$ kommutiert, d.h., es gilt $f_X \circ \varphi = \psi \circ f$.

Aufgabe 9:b. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Haben f und g gleiche Darstellungsmatrizen, so gilt $f = g$.

(ii) Sind B und B' Basen von V, so gilt stets $\Delta_B^{B'}(\mathrm{id}_V) = E_{\dim V}$.

(iii) Jedes $X \in K^{m\times n}$ mit $\operatorname{rg} X = n$ hat eine Linksinverse.

(iv) Zwei lineare Gleichungssysteme $AX = Y$ und $A'X = Y'$ sind genau dann äquivalent, wenn ihre erweiterten Koeffizientenmatrizen $(A|Y)$ und $(A'|Y')$ äquivalent sind.

Aufgabe 9:c. Sei $S^1 := \mathbb{R}/\sim$, wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : y = x + 2k\pi$$

gegeben ist; wir schreiben dann auch $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Man zeige, dass

$$\tau : \mathbb{R} \times S^1 \to S^1,\ \ (v, X) \mapsto \tau_v X := (x + v) + 2\pi\mathbb{Z} \text{ mit } X = x + 2\pi\mathbb{Z}$$

eine Gruppenoperation von $(\mathbb{R}, +)$ auf S^1 definiert, die *transitiv* ist, d.h.,

$$\forall X, Y \in S^1 \exists v \in \mathbb{R} : \tau_v(X) = Y.$$

Aufgabe 9:d. Sei $\mathcal{U} = X + U \subset \mathcal{A}$ ein affiner Unterraum. Zeigen Sie:

$$\forall Y \in \mathcal{U} : \mathcal{U} = \tau_U Y.$$

Folgern Sie, dass ein beliebige Schnitt affiner Unterräume leer oder ein affiner Unterraum ist.

Aufgabe 9:e. Zeigen Sie: Zwei affine Unterräume $\mathcal{U}, \mathcal{U}' \subset \mathcal{A}$ eines affinen Raumes mit Richtungvektorraum V sind genau dann parallel, wenn gilt

$$\exists v \in V : \mathcal{U}' = \tau_v \mathcal{U} = \{\tau_v X \mid X \in \mathcal{U}\}.$$

Aufgabe 9:f. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Eine Gruppenoperation ist immer bijektiv.

(ii) In einem affinen Raum kann ein fest gewählter "Ursprung" $O \in \mathcal{A}$ in jeden Punkt $X \in \mathcal{A}$ durch eine Translation verschoben werden.

(iii) Die Vereinigung zweier affiner Unterräume ist ein affiner Unterraum.

(iv) Ist $AX = Y$ ein lineares Gleichungssystem mit $\operatorname{rg}(A|Y) = \operatorname{rg} A$, so ist $L_{A,Y}$ ein affiner Unterraum der Dimension $\operatorname{def} f_A$.

Aufgabenblatt 10 (Kreuzerl bis Di 17 Dez 15:05)

Aufgabe 10:a. Sei σ Scherung mit linearem Anteil $\lambda = \mathrm{id}_V + w\omega$, $w\omega \neq 0$. Zeigen Sie: σ ist affine Transformation mit Fixpunktmenge

$$\mathrm{Fix}_\sigma = \tau_{\ker \omega} O \text{ und } \forall X \in \mathcal{A} : \sigma(X) \in \tau_{[w]} X.$$

Aufgabe 10:b. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Nur für Translationen ist der lineare Anteil die Identität.

(ii) Eine affine Transformation mit genau einem Fixpunkt ist jedenfalls eine Streckung.

(iii) Hat eine affine Transformation zwei Fixpunkte, so hat sie eine ganze Fixpunktgerade.

(iv) Hat eine affine Abbildung einer affinen Ebene in sich eine Fixpunktgerade, so ist sie eine Scherung.

Aufgabe 10:c. Zeigen Sie: Die affine Hülle $[\{X, Y, Z\}] = \tau_{[\{v,w\}]} Z \subset \mathcal{A}$ dreier Punkte $X, Y, Z \in \mathcal{A}$ mit $X = \tau_v Z$ und $Y = \tau_w Z$ ist unabhängig von der Auszeichnung eines Punktes Z.

Aufgabe 10:d. Formulieren Sie einen Fortsetzungssatz für affine Abbildungen mit Hilfe eines affinen Bezugssystems und beweisen Sie Ihren Satz durch Rückführung auf den Fortsetzungssatz für lineare Abbildungen.

Aufgabe 10:e. Seien $A, B = \tau_u A, C = \tau_v A \in \mathcal{A}^2$ Ecken eines nicht-degenerierten Dreiecks einer affinen Ebene $\mathcal{A}^2$. Zeigen Sie, dass durch

$$(A, B, C) \overset{\sigma}{\longmapsto} (A, B, \tau_u C)$$

eine Scherung bestimmt wird. [Hinweis: Skizze — betrachte (u^*, v^*).]

Aufgabe 10:f. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Jede affine Abildung bildet kollineare Punkte auf kollineare Punkte ab.

(ii) Die Inverse einer affinen Transformation ist immer affin.

(iii) In einer affinen Ebene ist jedes Dreieck ein baryzentrisches Bezugssystem.

(iv) Für kollineare Punkte A, B, C mit Teilverhältnis $t = (AC : BC)$ gilt stets: $\tau_{vt} A = C$, wobei v der Verbindungsvektor von B nach C ist.

Aufgabenblatt 11 (Kreuzerl bis Di 7 Jan 15:05)

Aufgabe 11:a. Beweisen Sie den Satz von Ceva.

Aufgabe 11:b. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Der Schwerpunkt ist das arithmetische Mittel.

(ii) Affine Transformationen bilden den Schwerpunkt einer Punktmenge auf den Schwerpunkt der Bildmenge ab.

(iii) Der Satz von Menelaus ist auch noch richtig, wenn die Gerade g parallel zu einer Seite des Dreiecks ist.

(iv) Der Schwerpunktsatz ist ein Spezialfall des Satzes von Ceva.

Aufgabe 11:c. Man betrachte das lineare Gleichungssystem $AX = Y$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 6 & 7 & 8 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 4};$$

bestimmen Sie $\operatorname{rg} A$ und eine Basis von $f_A(\mathbb{Q}^{4\times 1})$; nutzen Sie das Rangkriterium zur Bestimmung aller $Y \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$ mit $L_{A,Y} \neq \emptyset$.

Weiters: Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraumes $L_{A,0}$ des homogenen Gleichungssystems und die Lösungsmenge für jedes $Y \in \mathbb{Q}^{3\times 1}$. Verifizieren Sie, dass $L_{A,Y} \subset \mathbb{Q}^{4\times 1}$ parallele affine Unterräume sind und bestimmen Sie deren Dimensionen; erklären Sie den Zusammenhang mit dem Quotientenraum $\mathbb{Q}^{4\times 1}/L_{A,0}$.

Finden Sie instruktive und einfache(!) Beispiele für jede der diskutierten Eigenschaften bzw Sachverhalte.

Aufgabe 11:d. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Ein lineares Gleichungssystem mit genau so vielen Gleichungen wie Unbekannten hat eine eindeutige Lösung.

(ii) Gibt es in einem linearen Gleichungssystem mehr Gleichungen als Unbekannte, so ist das System nicht lösbar.

(iii) Jedes lineare Gleichungssystem mit weniger Gleichungen als Unbekannten hat eine Lösung.

(iv) Ein lineares Gleichungssystem $AX = Y$ mit $A \in \mathrm{Gl}(n)$ hat stets eine eindeutige Lösung.

Aufgabe 11:e. Sammeln Sie die wesentlichen Sätze des ersten Kapitels und erstellen Sie eine "Karte", in der die Abhängigkeiten der Sätze voneinander dargestellt werden.

Aufgabe 11:f. Kommentieren Sie sieben der folgend angedeuteten Beweisverfahren mit einem höchstens sieben Worte langen Satz. Stellen Sie fest, welche der Verfahren Ihnen bekannt vorkommen.

- Methode der direkten Unterschlagung: man lässt unauffällig Lücken in der Argumentation.
- Überrumpelungsmethode: im entscheidenden Moment erscheint das Wort "klar".
- Spezialfall-Methode: man illustriert die Behauptung mit einem Beispiel, allgemeiner Fall analog.
- Alternativ-Methode: man beweist etwas anderes, das ähnlich aussieht aber besser zu beweisen geht.
- Aufbaumethode: man macht oBdA eine "offensichtlich richtige" Voraussetzung, die den Beweis trivial macht.
- Erschöpfungs-Methode: man macht den Beweis so lang, dass der Zuhörer die entscheidenden Argumente nicht mehr mitbekommt.
- Definitions-Methode: man führt so viele neue Notationen ein, dass niemand dem Beweis folgen kann.
- Axiomatische Methode: man führt ein geeignetes Axiomensystem ein, das die Behauptung trivialisiert.
- Rekursiv: "Behauptung $\Rightarrow$ Voraussetzung".
- Autorativ: "der Professor hat gesagt, dass ..."
- Literarisch: "siehe Skriptum".
- Umfassend literarisch: "das steht in jedem besseren Lehrbuch".
- Didaktische Methode: "Beweis: Aufgabe".
- Marine-Methode: man macht die Tafel vor Beginn des Beweises gründlich nass.
- Altgriechisch: man verwendet ξ und ζ durcheinander.
- Expressionistisch: man lässt Text und Skizze durch gewagte Linienführung zu einem Gesamtkunstwerk verschmelzen.
- Rot-Kreuz-Methode: "kann mir jemand von Ihnen weiterhelfen?".
- Politische Methode: "wer meint, dass die Aussage falsch sei?".
- Demokratisch: "das ist trivial, wer möchte es trotzdem sehen?".
- Beweis durch vollständige Irritation.

Aufgabenblatt 12 (Kreuzerl bis Di 14 Jan 15:05)

Aufgabe 12:a. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $\mu : \mathbb{R}^{3\times 1} \times \mathbb{R}^{3\times 1} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) \mapsto a\,(x_2y_3 - x_3y_2) + b\,(x_3y_1 - x_1y_3) + c\,(x_1y_2 - x_2y_1);$$

zeigen Sie, dass μ eine alternierende 2-Form auf $\mathbb{R}^{3\times 1}$ ist.

Aufgabe 12:b. Seien $f \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $\mu \in \Lambda^m W^*$. Zeigen Sie:

$$f^*\mu : V^m \to K, \;\; (v_1, \ldots, v_m) \mapsto \mu(f(v_1), \ldots, f(v_m))$$

definiert eine alternierende m-Form auf V, $f^*\mu \in \Lambda^m V^*$.

Aufgabe 12:c. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Für jeden Vektorraum V ist $\Lambda^1 V^* = (V^1)^*$.

(ii) Für jeden Vektorraum V und $m \in \mathbb{N}$ ist $\Lambda^m V^* \leq (V^m)^*$.

(iii) Für $m > n = \dim V$ ist $\Lambda^m V^* = \{0\}$.

(iv) Ein Produkt $[.,.] : K^n \times K^n \to K$ ist alternierend, wenn gilt:

$$\forall v, w \in K^n : [v, w] + [w, v] = 0.$$

Aufgabe 12:d. Zeigen Sie, unter Beachtung aller Formalitäten, dass jede Permutation einer endlichen Menge Komposition von Transpositionen ist.

Aufgabe 12:e. Zeigen Sie: Die Determinante einer Matrix definiert eine Determinantenform auf $K^{m\times m} \cong (K^{m\times 1})^m$. [Hinweis: Betrachten Sie σ und $\sigma \circ \tau_{ij}$ für gerade Permutationen σ.]

Aufgabe 12:f. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Für jede Permutation $\sigma \in S_n$ ist $\mathrm{sgn}(\sigma^{-1}) = \mathrm{sgn}(\sigma)$.

(ii) Jede Permutation ist Produkt endlich vieler Matrizen.

(iii) Die Komposition zweier ungerader Permutationen ist stets gerade.

(iv) In der Leibniz-Formel kommen nie nur ungerade Permutationen vor.

Aufgabenblatt 13 (Kreuzerl bis Di 21 Jan 15:05)

Aufgabe 13:a. Sei $X \in K^{m\times m}$. Zeigen Sie, dass $X^\sharp X = E_m \det X$ für die *Kofaktormatrix* $X^\sharp := ((-1)^{i+j} \det X_{ji})_{i,j=1,\dots,m}$ von X und folgern Sie: Ist $\det X \neq 0$, so ist X invertierbar mit Inverser $X^\sharp \frac{1}{\det X}$. [Hinweis: Laplacescher Entwicklungssatz.]

Aufgabe 13:b. Zeigen Sie: $\det X = \det X_{11} \det X_{22}$ für eine *Blockmatrix*

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } X_{11} \in K^{m\times m},\ X_{12} \in K^{m\times n},\ X_{22} \in K^{n\times n}.$$

Aufgabe 13:c. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Ist $\mu(B) = 0$ für eine Basis B von V, so ist $\mu = 0$.

(ii) Sind B und $C = BX$ mit $X \in K^{n\times n}$ Basen von V, so ist $\det X \neq 0$.

(iii) Für $X \in K^{n\times n}$ ist $\operatorname{rg} X = n$ genau dann, wenn $\det X \neq 0$.

(iv) Für beliebige $x_1, \dots, x_n \in K$ ist $\det(x_i^j)_{i,j=1,\dots,n} = \prod_{i<j}(x_j - x_i)$.

Aufgabe 13:d. Entscheiden Sie, ob diese Aussagen wahr oder falsch sind:

(i) Zu jeder Basis gibt es eine eindeutige Determinantenform.

(ii) Zwei auf einer Basis übereinstimmende Determinantenformen μ und μ' sind gleich.

(iii) Zwei auf einem Unterraum $U \leq V$ mit $m := \dim U < \dim V$ übereinstimmende m-Formen $\mu, \mu' \in \Lambda^m V^*$ sind gleich.

(iv) Zu jedem Unterraum $U \leq V$ mit $\dim U = m$ gibt es eine m-Form $\mu \in \Lambda^m V^*$ mit $\mu|_{U^m} \neq 0$.

Aufgabe 13:e. Zeigen Sie: Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist wohldefiniert, d.h., für jede Permutation σ der Eckpunktmenge $\{A, B, C\}$ ist

$$F(\sigma(A), \sigma(B), \sigma(C)) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, F(A, B, C).$$

Aufgabe 13:f. Beweisen Sie die Flächenformel für die baryzentrischen Koordinaten von Punkten einer affinen Ebene.