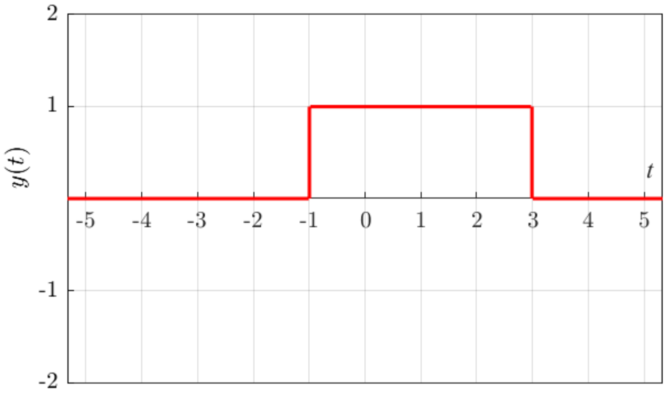
Die im Bild gezeigte Funktion $y(t)$ wurde mithilfe von einer Hilfsfunktion $x(t)$ konstruiert.




Welcher Ausdruck für $x(t)$ entspricht den **beiden** folgenden Bedingungen?

$$\begin{cases} y(t) = x(t) - \varepsilon(t-3) \\ y(t) = x(t) \cdot \varepsilon(3-t) \end{cases}$$

---

# Antwortmöglichkeiten

- A: **richtig** $x(t) = \varepsilon(t+1)$
- B: $x(t) = \varepsilon(t-1)$
- C: $x(t) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{t-1}{4}\right)$

Über die Funktion $x(t)$ ist bekannt, dass ihre gerader und konjugiert gerader Anteile, $x_g(t) = x_{g^*}(t) \neq 0$. Welche Behauptung ist auf jeden Fall richtig?

---

## Antwortmöglichkeiten

- A: **richtig** $x(t)$ ist rein reellwertig
- B: $x(t)$ ist gerade
- C: $x(t)$ ist rein imaginär

---

**Lösungsweg:**

$$\left.\begin{aligned} x_g &= \tfrac{1}{2}(x(t) + x(-t)) \\ x_{g^*} &= \tfrac{1}{2}(x(t) + x^*(-t)) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x(t) = x^*(t) \Rightarrow \mathrm{Im}\{x(t)\} = 0 \Rightarrow x(t) = \mathrm{Re}\{x(t)\}$$

Gesucht sind zwei harmonische Schwingungen $x(t)$ und $y(t)$ die folgenden Bedingungen entsprechen:
1) $x(t)$ ist konjugiert gerade,
2) Das Skalar Produkt $\langle x(t), y(t)\rangle = 0$
Wählen Sie **alle** Funktionspaare die beiden Bedingungen passen.

$$A) \quad x(t) = j\sin(\omega_1 t), \quad y(t) = \cos(\omega_2 t), \quad \omega_1 = \omega_2$$
$$B) \quad x(t) = j\cos(\omega_1 t), \quad y(t) = \sin(\omega_2 t), \quad \omega_1 = \omega_2$$
$$C) \quad x(t) = j\sin(\omega_1 t), \quad y(t) = \cos(\omega_2 t), \quad \omega_1 \neq \omega_2$$
$$D) \quad x(t) = j\cos(\omega_1 t), \quad y(t) = \sin(\omega_2 t), \quad \omega_1 \neq \omega_2$$
$$E) \quad x(t) = \sin(\omega_1 t), \quad y(t) = \cos(\omega_2 t), \quad \omega_1 = \omega_2$$
$$F) \quad x(t) = \cos(\omega_1 t), \quad y(t) = \sin(\omega_2 t), \quad \omega_1 = \omega_2$$
$$G) \quad x(t) = \sin(\omega_1 t), \quad y(t) = \cos(\omega_2 t), \quad \omega_1 \neq \omega_2$$
$$H) \quad x(t) = \cos(\omega_1 t), \quad y(t) = \sin(\omega_2 t), \quad \omega_1 \neq \omega_2$$

---

# Antwort

A, C, F, H

---

**Lösungsweg:**

Laut 1. Bedingung, $x(t) = x^*(-t)$. Dies gilt nur für $x(t)$ in der Form $x(t) = j\sin(\omega_1 t)$ und $x(t) = \cos(\omega_1 t)$. Tatsächlich:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= j\sin(\omega_1 t) \\ x^*(t) &= -j\sin(\omega_1 t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^*(-t) = -j\sin(-\omega_1 t) = j\sin(\omega_1 t) = x(t)$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \cos(\omega_1 t) \\ x^*(t) &= \cos(\omega_1 t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^*(-t) = \cos(-\omega_1 t) = \cos(\omega_1 t) = x(t)$$

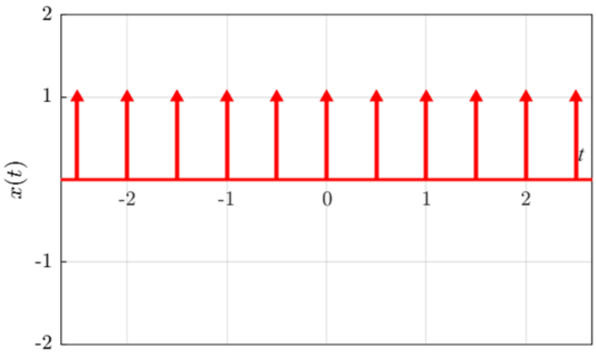
Die 2. Bedingung (Orthogonalität) ist erfüllt für alle $\omega_1 \neq \omega_2$ und für den Spezialfall $\omega_1 = \omega_2$ bei $\frac{\pi}{2}$ relativer Phasenverschiebung.
Somit sind die richtigen Paare: A, C, F, H

Welche Beschreibung des Signals $x(t) = \delta\left(\sin(\omega t)\right)$ trifft zu? $\omega \in \mathbb{R} > 0$

# Antwortmöglichkeiten

- A: **richtig** $x(t)$ ist ein Leistungssignal
- B: $x(t)$ ist ein Energiesignal
- C: $x(t)$ ist ein zeitbegrenztes Signal

**Lösungsweg:**
$x(t) = \delta\left(\sin(\omega t)\right)$ ist eine periodische Dirac-$\delta$ Folge mit der Periodendauer von $T = \frac{2\pi}{\omega}$.




Die übertragene Leistung ist

$$P_{x(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T |\delta(0)|^2 dt = 1^2 \cdot \frac{T}{T} = 1 < \infty$$

Die übertragene Energie ist $E_{x(t)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1^2 \to \infty$
Also es handelt sich um ein Leistungssignal.
$x(t)$ ist zeitunbegrenzt indem $x(t \to \infty) \neq 0$.

$\delta(t) * \delta(t) = ?$

## Antwortmöglichkeiten

- A: **richtig** $\delta(t)$
- B: $\delta'(t)$
- C: $2\delta(t)$

**Lösungsweg:**

### Spezielle kontinuierliche Signale

Buch Kap. 5.2.2

**Dirac-Impuls:**

Der *Dirac-Impuls* $\delta(t)$ wird als Distribution implizit definiert über

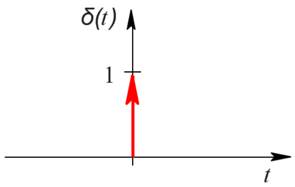
$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot \phi(t) = \phi(0)$$

wobei $\phi(t)$ stetig und beliebig oft differenzierbar sein muß.

Eine weitere gebräuchliche Bezeichnung für den Dirac-Impuls ist: $\delta_0(t)$

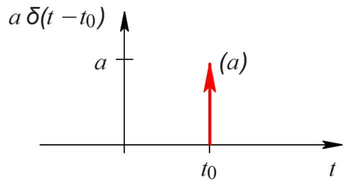
Der Dirac-Impuls besitzt folgende elementare Eigenschaften:

$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0 \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$$




*Abtast-* oder *Ausblendeigenschaft*:

$$x(t) \cdot \delta(t-t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t-t_0) \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot \delta(t-t_0) = x(t_0)$$




Zeit-skalierter Dirac-Impuls:

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \cdot \delta(t) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(ta)dt \underset{\tau=at}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)\frac{1}{|a|}d\tau = \frac{1}{|a|}$$

Gegeben sei die **zweiseitige** Laplace-Transformierte $X(s) = \dfrac{100}{s^2 - as - bs + ab}$ mit $a, b \in \mathbb{R} > 0$ und $b > a$ im Konvergenzgebiet $Re\{s\} < a$. Berechnen Sie die zugehörige Zeitfunktion $x(t)$ für $a = 2$ und $b = 3$ und bestimmen Sie daraus das numerische Ergebnis für $x(t = -4)$.

Hinweis: Verwenden Sie den Residuensatz. Beachten Sie dabei den Umlaufsinn der Hilfskurve: Das Residuum weist ein positives Vorzeichen auf falls die eingeschlossene Singularität im mathematisch positiven Sinn umlaufen wird, und negatives Vorzeichen falls der Umlauf im mathematisch negativen Sinn erfolgt.
Geforderte Genauigkeit: $\pm 0.01$.

**Lösungsweg:**
$X(s)$ besitzt einfache Pole bei $a$ und $b$. Das Konvergenzgebiet liegt lt. Angabe links von a. Für $t > 0$ schließen wir die Hilfskurve links und erhalten $x(t) = 0$. Für $t < 0$ schließen wir die Hilfskurve rechts und berechnen die zwei umschlossenen Residuen gemäß:

$$\text{Res}_1 = -\lim_{s \to a}(s-a)\frac{100e^{st}}{(s-a)(s-b)} = 100\frac{e^{at}}{b-a}$$

$$\text{Res}_2 = -\lim_{s \to b}(s-b)\frac{100e^{st}}{(s-a)(s-b)} = 100\frac{e^{bt}}{a-b}$$

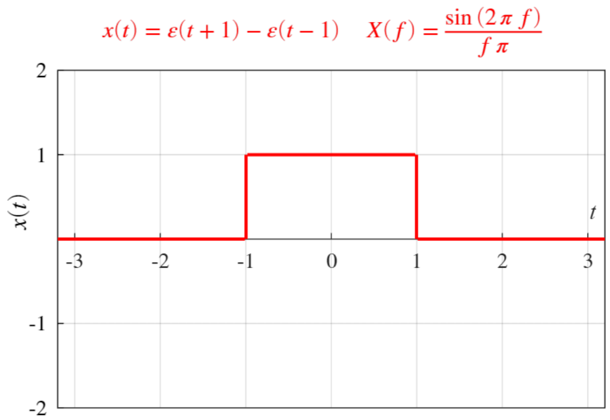
Das negative Vorzeichen ergibt sich hier jeweils aufgrund der Umlaufrichtung der Kurve im mathematisch negativen Sinn. Zusammengefasst ergibt das:

$$x(t) = 100\frac{e^{at} - e^{bt}}{b-a}\varepsilon(-t)$$

Einsetzen der Zahlenwerte: $x(t = -4) = 0.03$

Berechnen Sie die **zweiseitige** Laplace-Transformierte von $x(t) = \varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)$ und bestimmen Sie daraus das numerische Ergebnis für den Betrag von $X(s)$ and der Stelle $s = 1$, d.h. $|X(s=1)|$. Geforderte Genauigkeit: $\pm 0.1$.

**Lösungsweg:**




$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [\varepsilon(t+1) - \varepsilon(t-1)] e^{-st} dt = \int_{-1}^{1} e^{-st} dt = \frac{e^{s} - e^{-s}}{s}$$

Zahlenwert einsetzen: $|X(s=1)| = 2.4$

Wie Sie wissen besitzt der ideale Hilbert-Transformator die Impulsantwort $h_{ideal}(t) = \frac{1}{\pi t}$ mit zugehöriger Übertragungsfunktion (Fourier-Transformierter)
$H_{ideal}(f) = \mathcal{F}\{h_{ideal}(t)\} = -j \ \mathrm{sgn}(f)$. Real existierende Systeme sind jedoch in ihrer Bandbreite $B$ stets begrenzt. In dieser Aufgabe sollen Sie untersuchen wie sich diese Bandbegrenzung auf die Impulsantwort des Hilbert-Transformators auswirkt. Verwenden Sie dazu folgende modellhafte Übertragungsfunktion

$$H_{bandbegrenzt}(f) = H_{ideal}(f) \cdot \ \mathrm{rect}(\frac{f}{2B})$$

mit $B = 5$ Hz. Berechnen Sie die zugehörige Impulsantwort
$h_{bandbegrenzt}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{bandbegrenzt}(f)\}$. Werten Sie das Ergebnis zur Zeit $t = 0.1$ s aus, d.h. geben Sie Sie den Wert $h_{bandbegrenzt}(t = 0.1)$ an. Geforderte Genauigkeit: $\pm 0.1$

**Lösungsweg:**

$$h_{bandbegrenzt}(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H_{bandbegrenzt}(f)\} = \int_{-B}^{0} j e^{2\pi f t} df + \int_{0}^{B} (-j) e^{2\pi f t} df = \frac{1 - \cos(2\pi B t)}{\pi t}$$

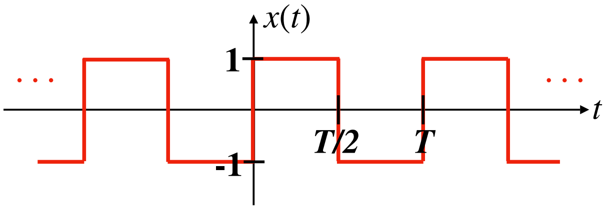
Durch Einsetzen der Zahlenwerte erhält man: $h_{bandbegrenzt}(t = 0.1 \text{ s}) = 6.4$

Berechnen Sie den Klirrfaktor des unten dargestellten periodischen Signals $x(t)$ mit Periode $T = 1$. Der Klirrfaktor ist definiert durch:

$$k = \sqrt{\frac{|X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2 + |X_5|^2 + \ldots}{|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2 + |X_5|^2 + \ldots}} \times 100\%$$

worin $X_n$ den n-ten (komplexen) Fourier-Koeffizienten bezeichnet. Geben Sie das Ergebnis in Prozent (%) an. Hinweis: $\sum\limits_{n=1,3,5,7\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$

Geforderte Genauigkeit: $\pm 0.1\%$




**Lösungsweg:**

Die Fourier-Koeffizienten des periodischen, symmetrischen Rechtecksignals $x(t)$ sind lt. Buch, Seite 258:

$$X_n = \begin{cases} -j\frac{2}{\pi n} & n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Eingesetzt in die Definitions-Gleichung des Klirrfaktors ergibt das:

$$k = \sqrt{\frac{|X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2 + |X_5|^2 + \ldots}{|X_1|^2 + |X_2|^2 + |X_3|^2 + |X_4|^2 + |X_5|^2 \ldots}} \times 100\% = \sqrt{\frac{\sum\limits_{3,5,7\ldots}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2}}{\sum\limits_{1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 n^2}}} \times 100\% =$$

$$= \sqrt{\frac{\sum\limits_{1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1}{\sum\limits_{1,3,5\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2}}} \times 100\% = \sqrt{\frac{\pi^2/8 - 1}{\pi^2/8}} \times 100\% = 43.4\%$$

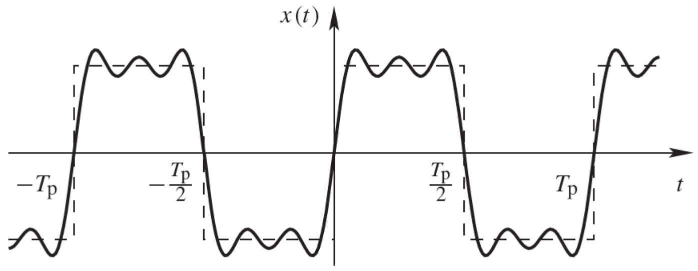



Bild 8.18: Darstellung eines periodischen Rechtecksignals über die ersten drei Glieder der Fourier-Reihe

**Beispiel 8.5: Fourier-Reihe periodisches Rechtecksignal**

Wir bestimmen die Fourier-Reihe des periodischen Rechtecksignals $x(t) = \mathrm{sgn}\left(\sin\left(2\pi \frac{t}{T_\mathrm{p}}\right)\right)$.
Die komplexen Fourier-Koeffizienten berechnen sich zu

$$
\begin{aligned}
X_n &= \frac{1}{T_\mathrm{p}} \int\limits_{-T_\mathrm{p}/2}^{T_\mathrm{p}/2} x(t) \cdot e^{-j2\pi n \frac{t}{T_\mathrm{p}}}\, dt = \frac{1}{T_\mathrm{p}} \int\limits_{-T_\mathrm{p}/2}^{0} -e^{-j2\pi n \frac{t}{T_\mathrm{p}}}\, dt + \frac{1}{T_\mathrm{p}} \int\limits_{0}^{T_\mathrm{p}/2} e^{-j2\pi n \frac{t}{T_\mathrm{p}}}\, dt \\
&= \frac{1}{T_\mathrm{p}} \left[-\frac{T_\mathrm{p}}{-j2\pi n}\, e^{-j2\pi n \frac{t}{T_\mathrm{p}}}\right]_{-\frac{T_\mathrm{p}}{2}}^{0} + \frac{1}{T_\mathrm{p}} \left[\frac{T_\mathrm{p}}{-j2\pi n}\, e^{-j2\pi n \frac{t}{T_\mathrm{p}}}\right]_{0}^{\frac{T_\mathrm{p}}{2}} \\
&= -\frac{j}{2\pi n}\left[1 - (-1)^n\right] + \frac{j}{2\pi n}\left[(-1)^n - 1\right] = \frac{j}{\pi n}\left[(-1)^n - 1\right].
\end{aligned}
$$

Für gerades $n$ verschwindet der Term, für ungerades $n$ gilt:

$$X_n = -j\,\frac{2}{\pi n} \qquad \text{bzw.} \qquad a_n = 0 \quad \text{und} \quad b_n = \frac{4}{\pi n}.$$

Damit lautet die komplexe bzw. reelle Fourier-Reihendarstellung

$$x(t) = \sum_{n \text{ ungerade}} -j\,\frac{2}{\pi n} \cdot e^{j2\pi n \frac{t}{T_\mathrm{p}}} = \sum_{n \text{ ungerade}} \frac{4}{\pi n} \cdot \sin\left(2\pi n \frac{t}{T_\mathrm{p}}\right).$$

Bild 8.18 zeigt das Signal und dessen approximierte Darstellung durch die ersten drei Glieder der Fourier-Reihe. ■

Gegeben sind zwei Signale $x_1(t)$ und $x_2(t)$ als harmonische Schwingungen in der Form $x_i(t) = A_i \cdot e^{j(\omega_i t+\varphi_i)} + \text{c. c.}$
Bekannt ist, dass $\omega_1 \equiv \omega_0$ und $\omega_2 \equiv 2\omega_0$.
Ermitteln Sie die Anfangsphase $\varphi_1$ (bzw. $\varphi_2$), wenn das Produkt

$x_1(t) \cdot x_2(t) = 2A_1A_2\,[\sin(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)]$.
$A_1,\ A_2,\ \omega_0 \in \mathbb{R} > 0$

Geben Sie den Phasenwert im Bereich $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ in Vielfachen von $\pi$ an. Erforderliche Genauigkeit $\pm 0,01$.
Bsp.: für den Phasenwert von $-\frac{\pi}{3}$ tragen Sie "-0,33" ein.

**Lösungsweg:**

$$x_i(t) = A_1 e^{j\omega_i t+\varphi_i} + c.c. = 2\cos(\omega_i t + \varphi_i)$$

$$\boxed{\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right]}$$

$$x_1(t) \cdot x_2(t) = 2A_1A_2\left[\cos\left((\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1-\varphi_2)\right) + \cos\left((\omega_1+\omega_2)t + (\varphi_1+\varphi_2)\right)\right]$$

Einsetzen von $\omega_1 = \omega_0$ und $\omega_2 = 2\omega_0$ :

$$x_1(t) \cdot x_2(t) = 2A_1A_2\left[\cos\left(\omega_0 t - (\varphi_1-\varphi_2)\right) + \cos\left(3\omega_0 t + (\varphi_1+\varphi_2)\right)\right]$$

Vergleich mit der gegebenen Form des Produkts:

$$x_1(t) \cdot x_2(t) = 2A_1A_2\left[\sin(\omega_0 t) + \cos(3\omega_0 t)\right] = 2A_1A_2\left[\cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(3\omega_0 t + 0)\right]$$

Hier haben wir berücksichtigt, dass $\boxed{\sin(t) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}$.
Somit:

$$\begin{cases} -(\varphi_1-\varphi_2) = -\frac{\pi}{2} \\ \varphi_1+\varphi_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 = \frac{\pi}{4} \quad \varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$$

---

Vergleich mit der gegebenen Form des Produkts (Alternative Angabevariante):

$$x_1(t) \cdot x_2(t) = 2A_1A_2\left[\cos(\omega_0 t) + \sin(3\omega_0 t)\right] = 2A_1A_2\left[\cos(\omega_0 t + 0) + \cos\left(3\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

Somit:

$$\begin{cases} \varphi_1-\varphi_2 = 0 \\ \varphi_1+\varphi_2 = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \varphi_1 = \varphi_2 = -\frac{\pi}{4}$$

**Erzeugung von Summen- und Differenzfrequenz**

Mit der trigonometrischen Indentität von vorher:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\theta = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \text{und } \varphi = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$2\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\varphi) = \underbrace{\cos(\theta-\varphi)}_{\text{Summenfrequenz}} + \underbrace{\cos(\theta+\varphi)}_{\text{Differenzfrequenz}}$$

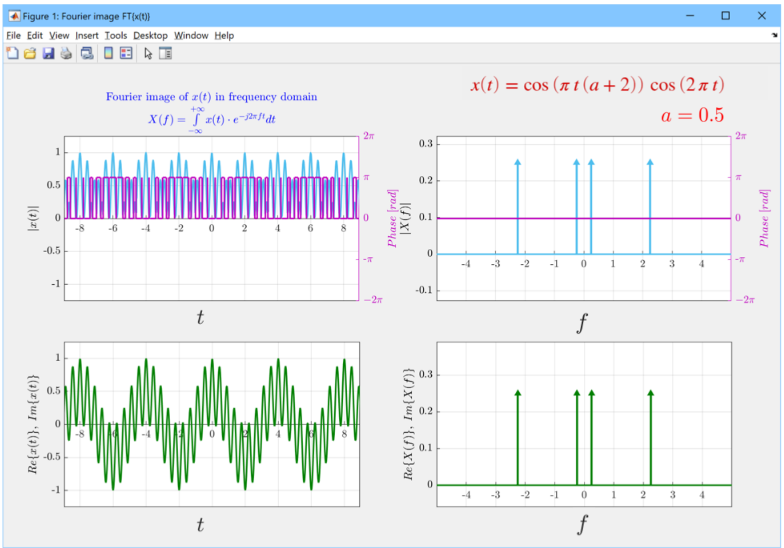
$y_1(t) = \cos(2\pi f_1\cdot t)$

X $\rightarrow$ $y_3(t)$

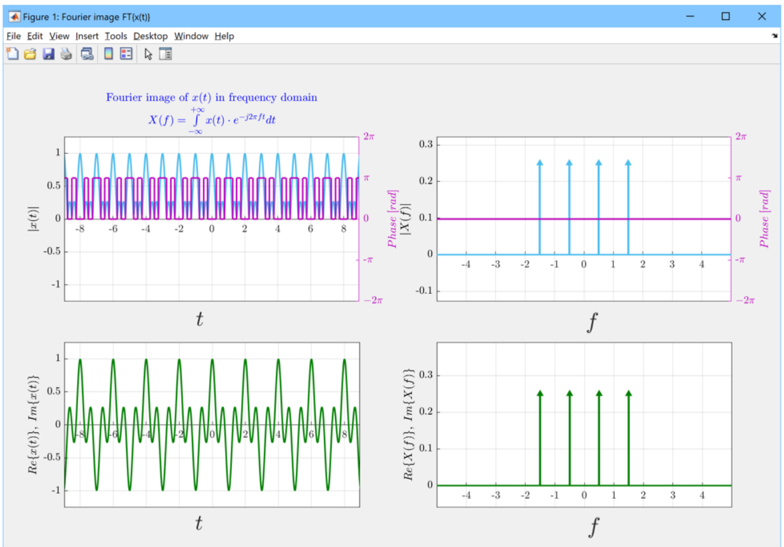
$y_2(t) = \cos(2\pi f_2\cdot t)$

# Multiplikative Überlagerung im Fourier Bereich

**Bsp. 32** Warum ist die Amplitude aller Schwingungskomponenten 0.25 ?




**Bsp. 33** Entarteter Fall: *f=0.5* und 2*f=1.0* → 3. Harmonische + Differenzfrequenz *f*



Berechnen Sie:
Variante A:
das Faltungsintegral $x(t) * y(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \cdot y(t-\tau) d\tau$
Variante B:
das Korrelationsintegral $\langle x(t), y(t+\tau) \rangle = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot y(t+\tau) dt$
für folgende Funktionspaare:

| Variante | $x(t)$ | $y(t)$ | Antwort |
|---|---|---|---|
| 1 | $\cos(\omega_0 t)$ | $\cos^2(\omega_0 t)$ | 0 |
| 2 | $\sin(\omega_0 t)$ | $\sin^2(\omega_0 t)$ | 0 |
| 3 | $\sin(\omega_0 t)$ | $\cos^2(\omega_0 t)$ | 0 |
| 4 | $\cos(\omega_0 t)$ | $\sin^2(\omega_0 t)$ | 0 |
| 5 | $e^{j\omega_0 t}$ | $\cos^2(\omega_0 t)$ | 0 |
| 6 | $e^{-j\omega_0 t}$ | $\cos^2(\omega_0 t)$ | 0 |
| 7 | 1 | $\cos^2(\omega_0 t)$ | $\frac{1}{2}$ |
| 8 | 1 | $\sin^2(\omega_0 t)$ | $\frac{1}{2}$ |

Geben Sie Ihre Antwort mit der $\pm 0.01$ Genauigkeit ein.

---

# Antwort

0 - für Varianten 1-6
0.5 - für Varianten 7,8

---

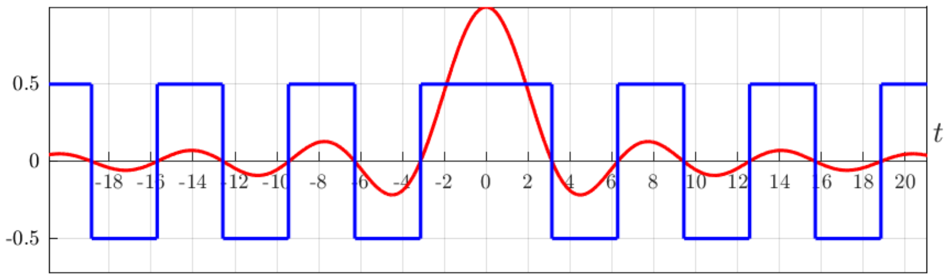
**Lösungsweg:**
Für Varianten 1-6, weisen $x(t)$ und $y(t)$ keine gemeinsame Periodizität (= spektrale Überlagerung) auf. Daher ergibt die Integralauswertung für alle diese Fälle $\boxed{0}$.
Für Varianten 7 und 8 gilt $y(t) = \frac{1}{2} \pm \frac{\cos(2\omega_0 t)}{2}$. Somit ergibt die Faltungsoperation zweier Konstanten $\frac{1}{2T} \int\limits_{-T}^{T} \left(\frac{1}{2} \cdot 1\right) dt = \boxed{\frac{1}{2}}$

Berechnen Sie die Leistung eines **nichtperiodisches** Signals $x(t) = \frac{1}{2}\text{sgn}\left[\text{si}(t)\right]$:

# Antwort

$P_{x(t)} = \frac{1}{4}$

**Lösungsweg:**




sgn$(t)$ ist an der Stelle $t = 0$ nicht definiert. Allerdings, hat dies keinen Einfluss auf die Auswertung der Fläche unter dem sgn$^2$ Profil.

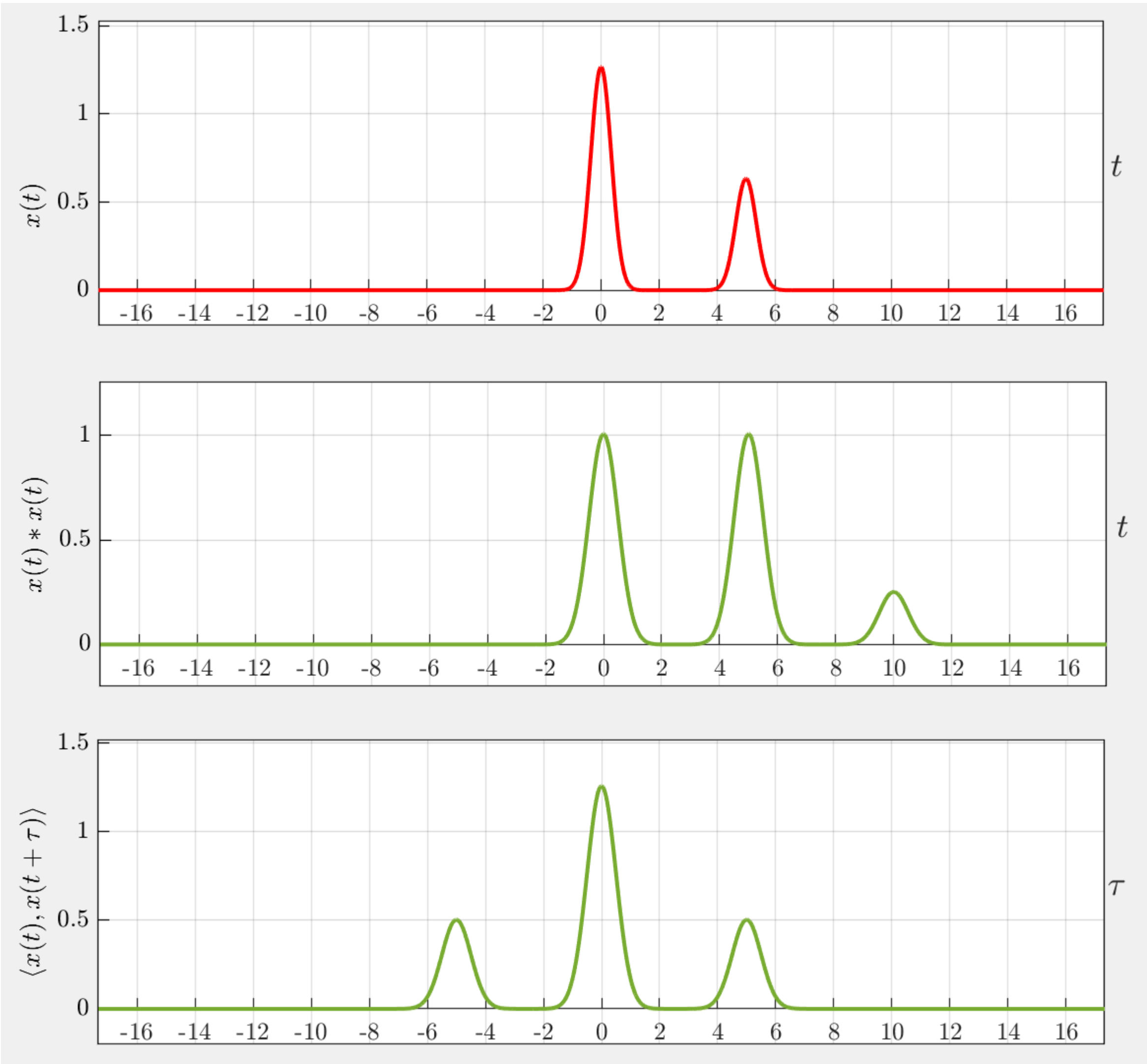
$$P_{x(t)} = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}|x(t)|^2dt\right) = \lim_{T\to\infty}\left(\frac{1}{2T}\int\limits_{-T}^{T}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\right)^2dt\right) = \boxed{\frac{1}{4}}$$

Für ein unbekanntes Zeitsignal $x(t)$ gegeben ist seine Selbstfaltung als Funktion $y(t)$. Finden Sie den Wert der Autokorrelationsfunktion des Signals $x(t)$ zum Zeitpunkt $\tau_1$.
Nehmen Sie an, dass die Impulsbreite $T \ll t_0$ ist.

| Variante | $y(t)$ | $\tau_1$ | Antwort |
|---|---|---|---|
| 1 | $e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2}+e^{-\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2}+\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{t-2t_0}{T}\right)^2}$ | $0$ | 1.25 |
| 2 | $e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2}+e^{-\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2}+\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{t-2t_0}{T}\right)^2}$ | $t_0$ | 0.5 |
| 3 | $e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2}+e^{-\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2}+\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{t-2t_0}{T}\right)^2}$ | $-t_0$ | 0.5 |
| 4 | $e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2}+e^{-\left(\frac{t-t_0}{T}\right)^2}+\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{t-2t_0}{T}\right)^2}$ | $2t_0$ | 0 |
| 5 | $e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2}+e^{-\left(\frac{t+t_0}{T}\right)^2}+\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{t+2t_0}{T}\right)^2}$ | $0$ | 1.25 |
| 6 | $e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2}+e^{-\left(\frac{t+t_0}{T}\right)^2}+\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{t+2t_0}{T}\right)^2}$ | $t_0$ | 0.5 |
| 7 | $e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2}+e^{-\left(\frac{t+t_0}{T}\right)^2}+\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{t+2t_0}{T}\right)^2}$ | $-t_0$ | 0.5 |
| 8 | $e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2}+e^{-\left(\frac{t+t_0}{T}\right)^2}+\frac{1}{4}e^{-\left(\frac{t+2t_0}{T}\right)^2}$ | $-2t_0$ | 0 |

---

**Lösungsweg:**



Wir wenden das Faltungstheorem an, finden das Bild im Fourier-Bereich, bestimmen den Betragsquadrat und berechnen die AKF mittels des Korrelationstheorems.
Die gegebene Funktion $y(t)$ besteht aus verzögerten Impulsen. Laut Fourier-Korrespondenz:

$$g(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^2} \circ\!\!-\!\!\!-\, G(f) = \sqrt{\pi} T \cdot e^{-(\pi f T)^2}$$

Laut Fourier Verschiebungstheorem:

$$g(t-t_0) \circ\!\!-\!\!\!-\, G(f) \cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

Somit:

$$y(t) \circ\!\!-\!\!\!-\, Y(f) = G(f)\left(1 + e^{-j2\pi f t_0} + \frac{1}{4} e^{-j4\pi f t_0}\right) = G(f)\left(1 + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f t_0}\right)^2$$

Laut Faltungstheorem $Y(f) \equiv X^2(f)$, wo $x(t) \circ\!\!-\!\!\!-\, X(f)$ ist. Gesucht wird das Fourier-Bild der AKF in der Form $Z(f) \equiv |X(f)|^2$. Der Betragsquadrat kann direkt aus dem quadratischen Term in $Y(f)$ durch Konjugation gewonnen werden:

$$\begin{aligned} Z(f) &= G(f)\left(1 + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f t_0}\right)\left(1 + \frac{1}{2} e^{+j2\pi f t_0}\right) \\ &= G(f)\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} e^{-j2\pi f t_0} + \frac{1}{2} e^{j2\pi f t_0}\right) \end{aligned}$$

Nach Anwendung des Korrelationstheorems, bekommen wir die AKF im Zeitbereich

$$Z(f) \,-\!\!\!-\!\!\circ\; 1.25 \cdot e^{-\left(\frac{\tau}{T}\right)^2} + \tfrac{1}{2} e^{-\left(\frac{\tau - t_0}{T}\right)^2} + \tfrac{1}{2} e^{-\left(\frac{\tau + t_0}{T}\right)^2}$$

## Spezielle Signale

Aufpassen! $z^2$ und $|z|^2$ unterscheiden sich!

**Betragsquadrat vs. Quadrat einer komplexen Zahl**

$z \;= \mathrm{Re} \;+ j\mathrm{Im}$

$z^2 =$
$=(\mathrm{Re} + j\mathrm{Im}) \cdot (\mathrm{Re} + j\mathrm{Im})$
$=(\mathrm{Re}^2 - \mathrm{Im}^2) + j2\mathrm{Im} \cdot \mathrm{Re}$

$Re\{z^2\} = \mathrm{Re}^2 - \mathrm{Im}^2$

$Im\{z^2\} = 2\mathrm{Im} \cdot \mathrm{Re}$

$\measuredangle\{z^2\} = \mathrm{atan}\left(\frac{2\mathrm{Im} \cdot \mathrm{Re}}{\mathrm{Re}^2 - \mathrm{Im}^2}\right) = 2\theta$

$z^2 \;= |z|^2\, e^{j2\theta} = \rho^2\, e^{j2\theta}$

$|z|^2 = z \cdot z^*$
$=(\mathrm{Re} + j\mathrm{Im}) \cdot (\mathrm{Re} - j\mathrm{Im})$
$=(\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2)$