72–81) Man untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

75) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n}$

$$Quotientenkriterium: (oranges\ Buch, s. 154)$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1, für\ alle\ außer\ endlich\ viele\ n => ist \sum\nolimits_n a_n\ absolut\ konvergent$$

$$Einsetzen\ und\ umformen\ ergibt\ dann:$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \left|\frac{\frac{n!*(n+1)}{(n+1)^n*(n+1)}}{\frac{n!}{n^n}}\right| = \left|\frac{n!*(n+1)*n^n}{n!*(n+1)*(n+1)^n}\right|$$

$$kuerzen:$$

$$\left|\frac{\cancel{n!}*\cancel{(n+1)}*n^n}{\cancel{n!}*\cancel{(n+1)}*(n+1)^n}\right| = \left|\frac{n^n}{(n+1)^n}\right|$$

$$und\ hoch\ n\ sowie\ n\ herausheben:$$

$$\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right| = \left|\left(\frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n\right| = \left|\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right|$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n entspricht\ der\ eulerschen\ Zahl\ e, d.h. wir\ haben: \left|\frac{1}{e}\right|$$

$$Wählt\ man\ ein\ beliebiges\ q > \frac{1}{e}, z.B. 0.4\ ist\ unser\ Quotientenkriterium\ erfüllt$$

$$\left|\frac{1}{e}\right| \leq 0.4 < 1 => \sum\nolimits_n a_n\ ist\ absolut\ konvergent$$

$$(durch\ den\ gefunden\ Grenzwert\ \frac{1}{e} ist\ die\ Konvergenz\ eig. sowieso\ schon\ bewiesen)$$