Mathematik III

Vorlesung 8, 24.11.2006

Markus Nemetz

basierend auf den Aufzeichnungen von Michael Birsak

Dezember 2006

1 Vorbemerkung

Prof. Panholzer hat die illustrierenden Beispiele aus der zur VO empfohlenen Lektüre gebracht - sie sind hier nicht angeführt.

Die z.T. gerafften Zusammenstellungen sind z.T. auch die jeweiligen theoretischen Grundlagen zu den Übungsbeispielen, die in ausgearbeiteter Form jeweils nach der Übungsrunde auf *http://www.wikiserver.at/tu-mathe-inf-3/* zu finden sind.

Markus Nemetz
03.12.2006

2 RWP - Alternativsätze

Fall: halbhomogenes lineares RWP:

- homogene lineare DGL: $L[y] := y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_0y(x) = 0$
- inhomogene lineare Randbedingung: $R = \vec{y}(a) + S\vec{y}(b) = \vec{p}$

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

Allg. Lsg. der homogenen linearen DGL ($\varphi_1, \dots, \varphi_n$ Lösungsbasis):

$$y(x) + c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \dots + c_n\varphi_n(x)$$

$$\vec{\varphi}_i(x) = \begin{pmatrix} \varphi_i(x) \\ \varphi_i'(x) \\ \vdots \\ \varphi_i^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; R(c_1\vec{\varphi}_1(a) + c_2\vec{\varphi}_2(a) + \dots + c_n\vec{\varphi}_n(a)) +$$
$$S(c_1\vec{\varphi}_1(b) + c_2\vec{\varphi}_2(b) + \dots + c_n\vec{\varphi}_n(b)) = \vec{p}$$
$$= R\Phi(a)\vec{c} + S\Phi(b)\vec{c} = \vec{p} \qquad \text{wobei}$$

$$\Phi(x) = (\vec{\varphi}_1(x) \,|\, \vec{\varphi}_2(x) \,|\, \dots \,|\, \vec{\varphi}_n(x)) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) & \varphi_2(x) & \cdots & \varphi_n(x) \\ \varphi_1'(x) & \varphi_2'(x) & \cdots & \varphi_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x) & \varphi_2^{(n-1)}(x) & \cdots & \varphi_n^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \; \text{LGS} \; \underbrace{[R\Phi(a) + S\Phi(b)]}_{\text{D}} \cdot \vec{c} = \vec{p} \qquad \mathbf{D} \cdot \tilde{\mathbf{c}} = \tilde{\mathbf{p}}$$

LGS ist mit n Unbekannten $c_1, \dots, c_n$ und n Gleichungen sowie mit $n \times n$ Matrix D.

- $\det D \neq 0$ - LGS für alle $\vec{p}$ eindeutig lösbar
- $\det D = 0$ - LGS hat entweder keine oder unendlich viele Lsg.

Alternativsatz: Gegeben sei ein halbhomogenes lineares RWP $L[y] = 0$, $R \cdot \vec{y}(a) + S \cdot \vec{y}(b) = \vec{p}$. Seien $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ eine Lösungsbasis der zugehörigen homogenen DGL und sei $D := R \cdot \Phi(a) + S \cdot \Phi(b)$, Φ definiert wie oben (=Fundamentalmatrix), dann gilt:

1. Ist D $\neq 0$, dann besitzt das halbhomogene RWP eine eindeutige Lösung für alle $\vec{p}$.
2. Ist D $= 0$, dann besitzt das halbhomogene RWP genau dann eine eindeutige Lösung wenn rg $D = \text{rg}(D, \vec{p})$.

3. Das entsprechende vollhomogene RWP, d.h. für $\vec{p} = \vec{0}$, besitzt genau dann nichttriviale Lsg. $y(x) \neq 0$, falls $\det D = 0$.

Bemerkung zum inhomogenen RWP $L[y] = b(x), R \cdot \vec{y}(a) + S \cdot \vec{y}(b) = \vec{p}$: Allgemeine Lösun der zugehörigen inhomogenen DGL ist gegeben durch

$$y(x) = c_1 \cdot \varphi_1(x) + c_2 \cdot \varphi_2(x) + \cdots + c_n \cdot \varphi_n(x) + y_p(x)$$

$y_p(x)$ ist die Partikulärlösung.

Anpassen an Randbedingungen liefert wiederum LGS der Gestalt

$$\begin{aligned} D \cdot \vec{c} &= \vec{q} \\ D &= R \cdot \Phi(a) + S \cdot \Phi(b) \\ \vec{q} &= \vec{p} - R \cdot \vec{y}_p(a) - S \cdot \vec{y}_p(b) \end{aligned}$$

Alternativsatz: Entweder ist das inhomogene RWP für alle $b(x)$ und $\vec{p}$ eindeutig lösbar (falls $\det D \neq 0$), oder das entsprechende vollhomogene RWP, d.h. $b(x) = 0 \ \wedge \ \vec{p} = \vec{0}$, besitzt nichttriviale Lösung (falls $\det D = 0$).

Beispiel: $y'' + \omega^2 y = c$, $y(0) = p_1$, $y(\pi) = p_2$.

Diese homogene DGL mit konstanten Koeffizienten beistzt die charakteristische Gleichung $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ mit den Lösungen $\lambda = \pm i \cdot \omega$ (konjugiert komplex). Die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen DGl lautet somit:

$$y_h(t) = c_1 \cdot \sin(\omega t) + c_2 \cdot \cos(\omega t)$$

$$\underbrace{R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{linker Rand}}, \qquad \underbrace{S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{rechter Rand}}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 \cdot y(0) & + & 0 \\ 0 \cdot y(0) & + & 0 \end{bmatrix}}_{R} \begin{matrix} y'(0)+ \\ y'(0)+ \end{matrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \cdot y(\pi) & + & 0 \\ 1 \cdot y(\pi) & + & 0 \end{bmatrix}}_{S} \begin{matrix} y'(\pi) = p_1 \\ y'(\pi) = p_2 \end{matrix}$$

$$R\vec{y}(a) + S\vec{y}(b) = \vec{p}, \qquad \Phi(t) = \begin{pmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) & -\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

Berechnen nach Alternativsatz, betrachten

$$D = R\Phi(0) + S\Phi(\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) & -\omega\sin(\omega t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \sin(\omega\pi) & \cos(\omega\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ \sin(\omega\pi) & \cos(\omega\pi) \end{bmatrix}$$

$$\det D = -\sin(\omega\pi)$$

Wann ist $\sin(\omega\pi) = 0$? Wenn $\omega \in \mathbb{Z}$.

Falls $\omega \notin \mathbb{Z}$ besitzt das RWP für alle p_1 und p_2 eine eindeutige Lösung (da Determinante von D nicht Null ist).

Ist die Determinante 0 und $\omega \in \mathbb{Z}$, so gibt es entweder keine oder unendlich viele Lösungen.

$$D \cdot \vec{c} = \vec{p}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & p_1 \\ \underbrace{\sin(\omega\pi)}_{=0} & \cos(\omega\pi) & p_2 \end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & p_1 \\ 0 & \cos(\omega\pi) & p_2 \end{array}\right] \triangleq \left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & p_1 \\ 0 & 0 & p_2 - p_1 \cdot \cos(\omega\pi) \end{array}\right]$$

Daraus folgt: $p_2 - p_1 \cdot \cos(\omega\pi) = 0$ hat unendlich viele Lösungen, $p_2 - p_1 \cdot \cos(\omega\pi) \neq 0$ hat keine Lösung.

3 Lösen von RWP mit Hilfe der Green-Funktion

Gegeben: halbhomogenes lineares RWP: $L[y] := y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_0 y(x) = b(x)$, $R \cdot \vec{y}(a) + S \cdot \vec{y}(b) = \vec{0}$.

Satz über die Green-Funktion von RWP: Seien $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ eine Basis des Lösungsraumes der zugehörigen homogenen DGL $L[y] = 0$, gelte für das halbhomogene RWP, dass $\det D = \det(R\Phi(a) + S\Phi(b)) \neq 0$. Dann existiert für jede Störfunktion $b(x)$ eine eindeutige Lösung des RWP. Diese lässt sich darstellen als

$$y(x) = \int_a^b g(x, \omega) \cdot b(\omega)\, d\omega,$$

wobei die sog. Green-Funktion $g(x, \omega) : [a, b] \times [a, b] \Rightarrow \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften besitzt:

- $g(x, \omega)$ erfüllt für jedes feste ω in Bezug auf $x (x \neq \omega)$ die homogene DGL, d.h. $L[g(x, \omega)] = 0$ für alle $x \neq \omega$.

- $g(x,\omega)$ erfüllt für jedes feste ω, $a < \omega < b$ die homogene Randbedingung, d.h..

$$R\vec{g}(a,\omega) + S\vec{b}(a,\omega) = \vec{0}, \qquad \text{wobei}$$
$$\vec{g}(x,\omega) = (g(x,\omega), g'(x,\omega), \dots, g^{(n-1)}(x,\omega)) \qquad \text{und}$$
$$g^{(k)}(x,\omega) = \frac{\partial^k}{\partial x^k} g(x,\omega)$$

- Die Funktionen $g(x,\omega), g'(x,\omega), \dots, g^{(n-1)}(x,\omega)$ sind stetig auf $[a,b] \times [a,b]$. Die Funktion $g^{(n-1)}(x,\omega)$ existiert für $x \neq \omega$ und es gilt:

$$g^{(n-1)}(x^+,x) - g^{(n-1)}(x^-,x) = 1$$

(x^+ ist der rechtsseitige, x^- der linksseitige Grenzwert)

$g(x,\omega)$ heißt auch Einflussfunktion, weil sie den Einfluss der Störfunktion $b(\omega)$ zur Lösung $y(x)$ im Punkt x angibt.

Bemerkung zum praktischen Rechnen: Erste Bedingung impliziert, dass $g(x,\omega)$ folgende Gestalt hat:

$$g(x,\omega) = \begin{cases} c_1(\omega)\cdot\varphi_1(x) + c_2(\omega)\cdot\varphi_2(x) + \dots + c_n(\omega)\cdot\varphi_n(x) & a \le x \le \omega \\ d_1(\omega)\cdot\varphi_1(x) + d_2(\omega)\cdot\varphi_2(x) + \dots + d_n(\omega)\cdot\varphi_n(x) & x < x \le b \end{cases}$$

Beispiel: Biegebalken $y''(x) = b(x)$, $0 \le x \le l$, RB: $y(0) = 0$, $y(l) = 0$.
Die Determinante D ist nicht Null, daher existiert eindeutige Lösung.
Homogene DGL $y''(x) = 0$ - Allgemeine Lösung: $y(x) = cx + d$. Daraus folgt: $y' = c$.
Ansatz Green-Funktion:

$$g(x,\omega) = \begin{cases} \int c_1(\omega)x + c_2(\omega) & 0 \le x \le \omega \\ \int d_1(\omega)x + d_2(\omega) & \omega < x \le l \end{cases}$$

Randbedingungen müssen erfüllt sein, wähle ω dest, $0 < \omega \le l$:

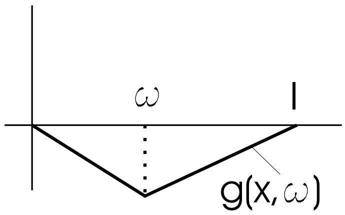
- RB $y(0) = 0$ - $x = 0$ - $c_1(\omega)x + c_2(\omega) = 0$ - $c_2(\omega) = 0$
- RB $y(l) = 0$ - $x = l$ - $d_1(\omega)l + d_2(\omega)$

Bei Stetigkeit von g wähle $x = \omega$: Daraus folgt $c_1(\omega)\omega + c_2(\omega) = d_1(\omega)\omega + d_2(\omega)$. Die Differenz zwischen rechtsseitigem und linksseitigem Grenzwert ist 1, daraus folgt:

$$g'(x,\omega) = \begin{cases} c_1(\omega), & 0 \le x \le \omega \\ d_1(\omega) & \omega < x \le l \end{cases} \qquad d_1(\omega) - c_2(\omega) = 1$$

$c_2(\omega) = 0$ - daher ist $c_1(\omega) = d_1(\omega) - 1$:

$$\omega(d_1(\omega) - 1) = d_1(\omega)\omega - d_1(\omega)l$$
$$d_1(\omega)(\omega - \omega + l) = \omega \qquad \Rightarrow \qquad d_1(\omega) = \frac{\omega}{l}$$



$c_1(\omega) = d_1(\omega) - 1 = \frac{\omega}{l} - 1 = \frac{\omega - l}{l}$.
$d_2(\omega) = -ld_1(\omega) = -\omega$
Somit gilt:

$$g(x,\omega) = \begin{cases} \frac{\omega - l}{l}, & 0 \le x \le \omega \\ \frac{\omega}{l} & \omega < x \le l \end{cases}$$
$$y(x) = \int_0^l g(x,\omega) \cdot (-b(\omega))\, d\omega$$

4 Eigenwertprobleme

Spezielle Randwertprobleme, die von einem Parameter λ abhängen. Betrachte vollhomogenes lineares RWP. Die Existenz von nichttrivialer Lösung $y(x) = 0$ hängt von der Wahl des Parameters $\lambda \in \mathbb{C}$ (oder $\lambda \in \mathbb{R}$) ab.

Definition: Jeder Wert λ, für den das vollhomogene RWP nichttriviale Lösungen besitzt, heißt Eigenwert. Die zugehörigen nichtrivialen Lösungen $y(x)$ heißen Eigenfunktionen zum Eigenwert λ.

Anmerkung: Aus dem Alternativsatz folgt: det $D = 0 \Leftrightarrow \lambda$ ist Eigenwert.

Beispiel: 'Knickstab' - RWP: $y''\lambda y = 0$, $y(0) = 0$,$y(l) = 0$. Uns interessieren die reellen Eigenwerte $\lambda > 0$ (Stab bricht).

Betrachte zunächst $\lambda = 0$. Die allgemeine Lösung der zugehörigen DGL ergibt sich aus $\alpha^2 + \lambda = 0$ mit $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$.

Die allgemeine Lösung ist somit: $y(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$.

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}x) & \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) & \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) \end{bmatrix}$$

$$D = R\Phi(0) + S\Phi(l) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\sqrt{\lambda}x) & \sin(\sqrt{\lambda}x) \\ -\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x) & \sqrt{\lambda}\cos(\sqrt{\lambda}x) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{bmatrix}$$

$\det D = \sin(\sqrt{\lambda}l) = 0$ - d.h. $\sqrt{\lambda} = k\pi,\ k = 1, 2, 3, \ldots$.

Es gibt unendlich viele Eigenwerte: $\lambda_k = (\frac{k\pi}{l})^2$.

Eigenfunktion: $D \cdot \vec{c} = \vec{0}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & \sin(\sqrt{\lambda}l) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 \\ \cos(\sqrt{\lambda}l) & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = 0$$

c_2 kann somit beliebig gewählt werden. Die zugehörige Eigenfunktion lautet somit:

$$y_k = c_1 \cdot \cos(\sqrt{\lambda}l) + c_2 \cdot \sin(\sqrt{\lambda}l) = \mathbf{c_2} \cdot \sin(\sqrt{\lambda}\mathbf{l})$$