Analysis UE 6

Styll Patrick

11. Mai 2022

1 - Beispiel 144

Man zeige, dass die Funktion $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ für $x \geq 0$ streng monoton wachsend und für $x \leq 0$ streng monoton fallend ist und bestimme jeweils die Umkehrfunktion.

Zum Bestimmen dessen, ob die Funktion streng monoton fallend bzw. streng monoton steigend ist, bediene man sich zunächst der ersten Ableitung:

$$\cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Wir wissen: Eine Nullstelle in der Ableitung einer Funktion bedeutet ein potentielles Minimum oder Maximum, und somit einen Monotoniewechsel in unserer ursprünglichen Funktion. Wir sehen, dass $\frac{e^x-e^{-x}}{2} = 0$ genau dann gilt, wenn $x = 0$. Durch die zweite Ableitung sehen wir nun genauer, ob es sich wirklich um einen Monotoniewechsel handelt.

$$\cosh''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^0 + e^0}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Somit ist die Funktion an dieser Stelle positiv gekrümmt; wir besitzen also ein lokales Minimum. Ein Monotoniewechsel an der Stelle $x = 0$ ist somit bewiesen.

Nun wollen wir die Umkehrfunktion berechnen. Hierfür gilt:

$$f^{-1}(y) = acosh(y)$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$$

$$e^x + e^{-x} = 2y$$

Den *Logarithmus naturalis* können wir aufgrund der Addition nicht direkt anwenden. Aus diesem Grunde substituieren wir mit $e^x = z$:

$$z + \frac{1}{z} = 2y \qquad | \cdot z$$

$$z^2 + 1 = 2yz$$

$$z^2 - 2yz + 1 = 0$$

Hier wenden wir nun die kleine quadratische Formel an:

$$z_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2 - 1}$$

Nun resubstituieren wir und nutzen dabei aus, dass $e^x = z \rightarrow x = \ln(z)$ gilt.

$$x = \ln(y \pm \sqrt{y^2 - 1})$$

Aber wie ist es nun möglich, dass zwei mögliche Umkehrfunktionen existieren? Sehen wir uns diese Beziehung graphisch an, indem wir unsere Funktion an der ersten Mediane spiegeln:

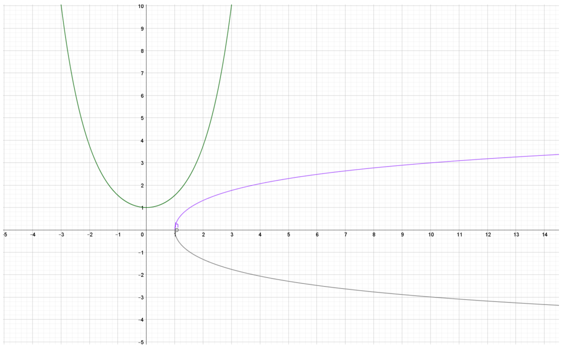

Abbildung 1: $\cosh(x)$

Wir sehen, dass dies durchaus zulässig ist - wir haben nun eben eine Umkehrfunktion für $y < 0$ und $y > 0$.

2 - Beispiel 146

Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cdot \cos x$ im Intervall $I = [-\pi, \pi]$.

Trivialerweise ist $f(x)$ stetig, da sie aus zwei stetigen Funktionen besteht. Zur weiteren Diskussion benötigen wir nun folgende Ableitungen:

$$f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$$

$$f'(x) = \cos x + \sqrt{3} \sin x$$

$$f''(x) = -\sin x + \sqrt{3} \cos x$$

Berechnen wir nun die Nullstellen. Dafür müssen wir lediglich $f(x) = 0$ berechnen.

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\cos x = -\sqrt{3} \sin x \qquad | \div \sin x$$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

Wir haben somit Nullstellen in $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = -\frac{2\pi}{3}$.
Die Extremstellen erhalten wir durch $f'(x) = 0$.

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0$$

$$\cos x = -\sqrt{3} \sin x$$

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan x$$

Somit erhalten wir Extremstellen an $x = -\frac{\pi}{6}$ und $x = \frac{5\pi}{6}$.

Jetzt fehlt noch das Feststellen, ob diese berechneten Punkte entweder Minima oder Maxima sind. Dies hängt von der Krümmung ab, somit benutzen wir die zweite Ableitung:

$$f''(-\frac{\pi}{6} > 0$$

$$f''(\frac{5\pi}{6}) < 0$$

Wir haben also ein Minimum an der Stelle $-\frac{\pi}{6}$ und ein Maximum an der Stelle $\frac{5\pi}{6}$.
Wendepunkte erhalten wir durch $f''(x) = 0$.

$$-\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$-\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$$

$$\tan x = \sqrt{3}$$

Wir haben also Wendepunkte an den Stellen $x = \frac{\pi}{3}$ und $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Des Weiteren gilt in Bezug auf die Konvexität, dass:

$$f''(x) < 0, x \in (\frac{\pi}{3}; \pi]$$

$$f''(x) > 0, x \in (-\frac{2\pi}{3}; \frac{\pi}{3})$$

$$f''(x) < 0, x \in [-\frac{2\pi}{3}; -\pi)$$

3 - Beispiel 157

Sei $f_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ monoton fallend und differenzierbar. Man zeige, dass dann $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Für unsere Annahme gilt, dass: (in Annahme dass $x \neq x_0$)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

Hierbei müssen nun auch folgende Fälle betrachtet werden:

- $x < x_0$:
  Wir können aufgrund dessen, dass die Funktion monoton fallend ist, darauf schließen, dass $f(x) - f(x_0) \geq 0$ ist. Des Weiteren wissen wir, dass $x - x_0 < 0$ ist. Konsequent ist also der gesamte Ausdruck ≤ 0.

- $x > x_0$:
  Wir können aufgrund dessen, dass die Funktion monoton fallend ist, darauf schließen, dass $f(x) - f(x_0) \leq 0$ ist. Des Weiteren wissen wir, dass $x - x_0 > 0$ ist. Konsequent ist also der gesamte Ausdruck ≤ 0.

Wir sehen also, dass obige Aussage in allen Fällen zutrifft, und der Beweis ist abgeschlossen.

4 - Beispiel 184

Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $f(x) = \cosh(x)$ an der Stelle $x_0 = 1$.

Achtung - Fehler! Fälschlicherweise wurde hier mit $x_0 = 0$ gerechnet. Für Übungszwecke lasse ich aber auch diesen Teil hier.

Zu zeigen ist somit $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

Uns ist bereits bekannt, dass $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ gilt. Des Weiteren gilt:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}^{gerade} + \sum_{n=0}^{\infty} \overbrace{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}^{ungerade}$$

$$e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}_{Exponent} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Zusammengefasst gilt dann:

$$\cosh x = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} - \cancel{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}}{2}$$

$$\frac{2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

Kommen wir nun zur Lösung, nach welcher in der Angabe gefragt wurde:

Beschäftigen wir uns zunächst mit der Ableitung des Cosinus Hyperbolicus. Wir wissen, dass gilt:

$$(\cosh x)' = \sinh x$$
$$(\sinh x)' = \cosh x$$

Allgemein könnten wir dann im Prinzip ja sagen, dass für die n-te Ableitung des Cosinus Hyperbolicus gilt:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \cosh x, & n \quad gerade \\ \sinh x, & n \quad ungerade \end{cases}$$

Wie lässt sich das nun zu einem Ausdruck zusammenfassen? Betrachten wir andere Schreibweisen des Cosinus Hyperbolicus und des Sinus Hyperbolicus:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Das können wir jetzt nutzen, um einen allgemeineren Audruck für die n-te Ableitung zu erhalten. Somit gilt also:

$$f^{(n)}(x) = \frac{e^x + (-1)^n e^{-x}}{2}$$

Definition - Taylorreihe: Die Reihe $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$ heißt Taylorreihe von $f(x)$ im Entwicklungspunkt (mit Anschlussstelle) x_0. Der Sonderfall $x_0 = 0$ wird auch McLaurinreihe genannt.

Diese Definition nutzen wir nun aus. Im unseren Falle, also mit $x_0 = 1$, gilt:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(1)}{n!} x^n$$

Und wir sind auch schon fast fertig - jetzt fehlt es nurmehr, unseren vorherigen Ausdruck einzusetzen.

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{\frac{e+(-1)^n e^{-1}}{2}}{n!} x^n = \sum_{n\geq 0} \frac{e + \frac{(-1)^n}{e}}{2n!} x^n$$

5 - Beispiel 191

Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion $f(x) = \frac{1}{1-3x}$ an der Anschlussstelle $x_0 = 7$. Bestimmen Sie weiters die zugehörigen Taylorpolynome zweiter Ordnung samt Restglied und eine Abschätzung für das Restglied im Intervall $[4, 10]$.

Zuerst wollen wir die Taylorreihe von $f(x)$ mit $x_0 = 7$ herausfinden - führen wir ein paar Ableitungen durch, um eventuell ein Muster zu erkennen, um die n-te Ableitung herauszufinden:

1. Ableitung: $(\frac{1}{1-3x})' = \overbrace{(1-3x)^{-1}}^{Kettenr.} = 3(1-3x)^{-1} = \frac{3}{(1-3x)^2}$

2. Ableitung: $\underbrace{(3(1-3x)^{-1})'}_{Produktr.} = 0 \cdot (1-3x)^{-2} + 3 \cdot (\underbrace{(1-3x)^{-2}}_{Kettenr.})'$

$3 \cdot ((-2) \cdot (1-3x)^{-3} \cdot (-3)) = 18(1-3x)^{-3} = \frac{18}{(1-3x)^3}$

3. Ableitung: $(18 \cdot (1-3x)^{-3})' = 162 \cdot (1-3x)^{-4} = \frac{162}{(1-3x)^4}$

4. Ableitung: $(\frac{162}{(1-3x)^4})' = \frac{1944}{(1-3x)^5}$

Hier sehen wir folgendes Muster für die n-te Ableitung:

$$f^{(n)}(x) = n!3^n(1-3x)^{-n-1} = \frac{n!3^n}{(1-3x)^{n+1}}$$

Das ist aber lediglich eine Behauptung, mit der man in der Mathematik (leider) nicht sehr weit kommt - wir müssen diesen Audruck noch beweisen. Das erledigen wir durch *vollständige Induktion*:

1. Induktionsanfang: ✓
2. Induktionsvoraussetzung: $f^{(n)}(x)$ ✓
3. Induktionsbehauptung: $f^{(n+1)}(x) = \frac{3 \cdot (n+1)!3^n}{(1-3x)^{n+2}}$
4. Induktionsschritt: $(f^{(n)}(x))' = f^{(n+1)}(x)$

$$-(n!3^n) \cdot \frac{((1-3x)^{n+1})'}{((1-3x)^{n+1})^2} = -(n!3^n) \cdot \frac{(n+1)\cancel{(1-3x)^n}(-3)}{\cancel{(1-3x)^{n+1}}(1-3x)^{n+1}}$$

$$-(n!3^n) \cdot \frac{-(3(n+1))}{(1-3x)^{n+2}} = \frac{n!3^n3(n+1)}{(1-3x)^{n+2}} = \frac{(n+1)!3^{n+1}}{(1-3x)^{n+2}}$$

q.e.d.

Wir haben somit also die n-te Ableitung von $f(x)$ gefunden. Jetzt fehlt nurmehr das Einsetzen in die Taylorreihe, wodurch wir erhalten:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(7)}{n!}(x-7)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{\frac{n!3^n}{(1-3\cdot 7)^{n+1}}}{n!}(x-7)^n$$

$$\sum_{n\geq 0} \frac{\cancel{n!}3^n}{(-20)^{n+1}\cdot \cancel{n!}} = \sum_{n\geq 0} \frac{3^n}{(-20)^{n+1}} \cdot (x-7)^n$$

Beschäftigen wir uns nun mit den Taylorpolynomen zweiter Ordnung und dem Restglied, sowie einer Abschätzung für das Restglied von Lagrange für das Intervall $[4,10]$. Nehmen wir uns den Satz von Taylor zuhilfe:

Definition - Satz von Taylor: Sei f auf dem Intervall $I = [x_0, x]$ (bzw. $[x, x_0]$) n-mal stetig differenzierbar und im Inneren $\dot{I}$ von I $(n+1)$-mal differenzierbar. Dann existiert eine Zahl $\xi \in \dot{I}$, sodass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Der Term $R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!(x-x_0)^{n+1}}$ heißt *Restglied von Lagrange*. Falls f unendlich oft stetig differenzierbar ist, so ist auch die Taylorreihe von f definiert. Die Taylorreihe stimmt genau dann mit der Funktion $f(x)$ überein, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$.

Das Taylorpolynom zweiten Grades lässt sich leicht durch Einsetzen herausfinden. So gilt:

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{3^k}{(-20)^{k+1}}(x-7)^k + \frac{f^{(3)}(\xi)}{(2+1)!}(x-7)^4$$

Dies gilt für alle $\xi \in \dot{I}$, wobei unser $\dot{I}$ unseres Intervalls $[4,10]$ lediglich $(4,10)$ entspricht. Es gilt also für:

$$\forall x \in [4,10] \exists \xi \in (4,10)$$

Betrachten wir nun den Betrag unseres Restglieds R_2 genauer, um es für das gegebene Intervall abschätzen zu können. Wir arbeiten somit im Intervall $[x, x_0]$ und $[x_0, x]$, in unserem Falle also $[4,7]$ und $[7,10]$. $f^{(3)}(\xi)$ ist hierbei gleich $\frac{162}{(1-3x)^4}$.
Insgesamt eingesetzt ergibt das dann:

$$R_2 = |\frac{\frac{162}{(1-3\xi)^4}}{6}(x-7)^4| = |\frac{162}{6(1-3\xi)^4}(x-7)^4|$$

In summa summarum durch Einsetzen bei statischem x:

Fall 1: $[x, x_0] = [4, 7]$

$$\frac{162}{87846}(x-7) \geq \frac{162}{6(1-3\xi)}(x-7) \geq \frac{162}{960000}(x-7)$$

$$R_2(4) \geq R_2(\xi) \geq R_2(7)$$

Fall 2: $[x_0, x] = [7, 10]$

$$\frac{162}{960000}(x-7) \geq \frac{162}{6(1-3\xi)}(x-7) \geq \frac{162}{4243686}(x-7)$$

$$R_2(7) \geq R_2(\xi) \geq R_2(10)$$

Wir wollen nun das Maximum innerhalb I für dieses Restglied bestimmen - hier ist leicht zu erkennen, dass dieses gleich $R_2(4)$ entspricht. Und somit haben wir die beste Abschätzung für das Restglied erhalten.

6 - Beispiel 194

Ein Monopolist produziert eine Ware, wobei die Kosten in Abhängigkeit von der Stückzahl durch die Funktion $K(x) = 5000 + 100x + x^2$ beschrieben werden, der Umsatz durch $U(x) = 1000x - 2x^2$. Der Staat hebe die Steuer $S(x) = 100x$ auf die Absatzmenge ein. Maximieren Sie den Unternehmensgewinn. Berechnen Sie die Steuereinnahmen für den Staat bei gewinnmaximaler Absatzmenge.
Ermitteln Sie weiters jenen Steuerersatz r (also $S(x) = rx$), der dem Staat die maximalen Steuereinnahmen bringt, falls das Unternehmen wieder die gewinnmaximale Menge absetzt.

Berechnen wir zunächst den Gewinn. Diesen erhalten wir durch $U - K - S$, also:

$$G(x) = 1000x - 2x^2 \overbrace{-5000 - 100x - x^2}^{K(x)} \overbrace{-100x}^{S(x)}$$

Nun wollen wir den größtmöglichen Gewinn berechnen - wir berechnen also das Maximum der Funktion, wobei wir uns sowohl die erste als auch die zweite Ableitung zunutze machen:

$$G'(x) = -6x + 800$$

$$G''(x) = -6$$

Es ist klar herauszulesen, dass wir jedenfalls eine negative Krümmung haben - sollte ein Extrempunkt existieren, ist dieser jedenfalls ein Maximum. Berechnen wir dieses:

$$G'(x) = 0$$

$$-6x + 800 = 0$$

$$800 = 6x$$

$$x \approx 133Stk.$$

Der maximale Unternehmensgewinn liegt also bei circa 133 Stück. Berechnen wir nun die Steuern, welche bei dieser Stückzahl anfallen:

$$S(133) = 100 \cdot 133 = 13300$$

Als nächstes beschäftigen wir uns mit dem Steuersatz r, indem wir uns nochmals an $G(x)$ bedienen, aber anstatt von $S(x)$ den Steuerersatz rx einsetzen.

$$G(x) = 1000x - 2x^2 \overbrace{-5000 - 100x - x^2}^{K(x)} \overbrace{-rx}^{S(x)}$$

$$G(x) = -3x^2 + 900x - 5000 - rx$$

$$G(x) = -3x^2 + x(900 - x) - 5000$$

Um ein r zu berechnen, bedienen wir uns wieder an $G'(x) = 0$:

$$G'(x) = -6x + 900 - r = 0$$
$$r = -6x + 900$$

Wir setzen das r in unsere ursprüngliche Gleichung ein:

$$S(x) = rx = (-6x + 900)x = -6x^2 + 900$$

Für den Steuerersatz, welcher die maximalen Gewinne erzielt, benötigen wir wieder erste und zweite Ableitung und gehen folgendermaßen vor:

$$S'(x) = -12x + 900$$
$$S''(x) = -12$$

Wir haben eine negative Krümmung, ein existierender Extremwert ist also definitiv ein Maximum. Setzen wir nun $S'(X) = 0$:

$$-12x + 900 = 0$$
$$900 = 12x$$
$$x = 75$$

Diesen Wert setzen wir wieder in $G'(x)$ ein, um das r zu berechnen:

$$-6 \cdot 75 + 900 = 450 = r$$