Institute of Analysis and Scientific Computing
Ao.Univ.Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger
Stefan Wurm, BSc

106.054 UE AKNUM Computernumerik, 101.484 VU Computernumerik - SS 2016

Vorzubereiten bis: 31. Mai 2016 10. Mai 2016

4. Übungsblatt

Kreuzen Sie **bis zwei Stunden vor Übungsbeginn** auf TUWEL (`https://tuwel.tuwien.ac.at`) jene Aufgaben, die Sie gerechnet haben und in der Übung präsentieren können.

Mit * gekennzeichnete Beispiele **dürfen** Sie mit MATLAB bearbeiten, jene mit ! **müssen** mit MATLAB gelöst werden. Bringen Sie Ihren Code auf USB-Stick oder eigenem Rechner (mit VGA- oder HDMI-Anschluss) mit.

Bei Unklarheiten wenden Sie sich bitte gerne an `stefan.wurm@tuwien.ac.at` oder posten Sie in das TUWEL-Forum.

Aufgabe 1:
Approximation durch Taylorpolynome

a) Gesucht ist eine Approximation der Funktion

$$f(x) := \ln(1+x)$$

auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ durch ein Polynom .

Berechnen Sie dazu das Taylorpolynom um die Entwicklungsstelle 0 mit genügend hohen Grad, so dass der absolute Fehler durch i) 10^{-8} bzw. ii) 10^{-16} beschränkt ist.

Hinweis: Betrachten Sie das Restglied des Polynoms und schätzen Sie dieses ab.

!b) Implementieren Sie die gefundenen Approximationen in MATLAB, versuchen Sie dabei, die Auswertung möglichst effizient und numerisch sinnvoll zu gestalten.

Plotten Sie beide Approximationen und überprüfen Sie die Approximationsqualität an von Ihnen gewählten Stellen in $[0, \frac{1}{2}]$ und außerhalb dieses Intervalls.

Aufgabe 2:
(!) *Tschebyscheff-Approximation*

Gesucht ist eine weitere Approximation der Funktion

$$f(x) := \ln(1+x)$$

auf dem Intervall $[0, \frac{1}{2}]$ durch ein Polynom.

Diesmal soll die Approximation durch Tschebyscheff-Interpolation an 8 bzw. 16 Punkten erfolgen:

- Berechnen Sie sich **einmalig** die Nullstellen von T_8 bzw. T_{16} und transformieren Sie diese auf $[0, \frac{1}{2}]$.
- Berechnen Sie sich die dazugehörigen Auswertungen von $f(x)$.
- Interpolieren Sie an diesen Wertepaaren und werten Sie das erhaltene Polynom an einigen Stellen in $[0, \frac{1}{2}]$ und außerhalb dieses Intervalls (= Extrapolation) aus.

Plotten Sie auch den absoluten Fehler auf $[0, \frac{1}{2}]$.

Aufgabe 3:
(!) Betrachten Sie die Funktion

$$f(x) = \cos x$$

auf dem Intervall $[0, \pi]$. Führen Sie verschiedene Polynominterpolationen $p(x)$ durch und geben Sie jeweils den Fehler $f(x) - p(x)$ an der Stelle $\frac{\pi}{3}$ an:

(a) Polynom vom Grad 1: $x_0 = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}$

(b) Polynom vom Grad 2: $x_0, x_1, x_2 = \frac{\pi}{4}$

(c) Polynom vom Grad 3: $x_0, x_1, x_2, x_3 = \frac{\pi}{6}$

(d) gerades Polynom 4. Grades: x_0, x_1, x_2

(e) ungerades Polynom 3. Grades: x_0, x_1

(f) Taylorpolynom vom Grad $n = 4$

(g) Interpolation mit Lagrange Polynomen an x_0, x_1, x_2

Aufgabe 4:
(!) Bestimmen Sie näherungsweise die Ableitung der Funktion $f(x) = x \sin x$ an $x = 0$, indem Sie an 5 Stellen x_i (etwa 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005,0.0001) interpolieren und für die Ableitung von f das abgeleitete Interpolationspolynom bei 0 auswerten. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit den Ergebnissen bei Berechnung mit dem einseitigen und dem zentralen Differenzenquotienten.

Aufgabe 5:
Berechnen Sie händisch das Hermitsche Interpolationspolynom $p(x)$ zu den Stützpunkten

$$(-1, 1)\,,\ (0, 2)\,,\ (1, 3) \ \text{ mit } \ f'(0) = 2 \ \text{ und } \ f''(0) = 2.$$

Aufgabe 6:
Der Interpolationsfehler an einer Stelle $\bar{x}$ hängt stark von der Funktion $\omega(\bar{x}) = |(\bar{x} - x_0)(\bar{x} - x_1)...(\bar{x} - x_n)|$ ab. Für $x_0 = 0$ und $x_2 = 1$ mit $n = 2$ soll eine Zwischenstelle x_1 bestimmt werden, so dass $\max_{0 \leq \bar{x} \leq 1} \omega(\bar{x})$ minimal wird.

Aufgabe 7:
(!) *Nevilleschema.* Programmieren Sie eine MATLAB Funktion mit der Signatur `function y0 = neville(x,y,x0)`, wobei `x` ein Vektor mit Stützstellen, `y` der zugehörige Vektor mit Funktionswerten, `x0` die gewünschte Auswertungsstelle und `y0` der Wert an dieser Stelle sein sollen. Testen Sie die Funktion anhand des folgenden Problems: Die Stützpunkte $(0, 1)$, $(1, 3)$ und $(3, 2)$ sind gegeben. Berechnen Sie den Wert des Interpolationspolynoms an der Stelle $x = 2$.