Abart Beispiel 141 (MA2 Sammlung)

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$$

2 Theoretische Grundlagen: Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Siehe Beispiel 141 (Hauptartikel).

3 Lösung des Beispiels

Die allgemeine Lösung der : inhomogenen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$$

wird in drei Schritten bestimmt:

1. Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h^{(x)}$
2. Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung $y_p^{(x)}$ (Partikulärlösung)
3. Zusammenführung von $y_h^{(x)}$ und $y_p^{(x)}$ nach dem Superpositionsprinzip ($y = y_h^{(x)} + y_p^{(x)}$); ggf. Lösung der Anfangswertaufgabe

3.1 Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung $y_h^{(x)}$

Lösung von $y'' - 4y' + 4y = 0$ durch den Ansatz $y = e^{\lambda x}$ (Parameter λ). Berechnen der notwendigen Ableitungen:

$$y' = \lambda e^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$$

Einsetzen des Ansatzes ergibt:

$$\begin{gathered}
\lambda^2 e^{\lambda x} - 4\lambda e^{\lambda x} + 4e^{\lambda x} = 0 \qquad | : e^{\lambda x} \ (e^{\lambda x} \neq 0) \\
\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \qquad \text{charakteristisches Polynom} \\
(\lambda - 2) \cdot (\lambda - 2) = 0 \qquad \text{Zerlegung in Linearfaktoren} \\
\text{Erhalte Lösungen mit Fall } \ \lambda_1 = \lambda_2 = 2 \qquad \text{Doppellösung, } \ \in \mathbb{R}
\end{gathered}$$

Die `Wronski`-Determinante ist 0 und die Basisfunktionen sind somit: $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$.
Die **allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung** lautet somit:

$$\mathbf{y = (c_1 x + c_2) \cdot e^{2x}}$$

3.2 Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung $y_p^{(x)}$ (Partikulärlösung)

Betrachte **Störfunktion** - Typus $s(x) = e^{cx}$. Unsere Störfunktion lautet $s(x) = e^{-2x}$ - mit $c = -2$.
Vergleiche c mit λ_1 und λ_2 - $c \neq \lambda_1$, $c \neq \lambda_2$ $\Rightarrow$ **kein Resonanzfall**, **Verwendung der Versuchslösung $\mathbf{y_h^{(x)} = Ae^{-2x}}$**. Berechnen der notwendigen Ableitungen:

$$y_p' = -2Ae^{-2x}, \qquad y_p'' = 4Ae^{-2x},$$

Einsetzen in die inhomogene Differentialgleichung:

$$4Ae^{-2x} + 8e^{-2x} + 8e^{-2x} = e^{-2x} \qquad | \, : \, e^{-2x}$$

$$4A + 8 + 8 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad A = -\frac{-15}{4} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y_p^{(x)} = -\frac{15}{4} e^{-2x}}$$

3.3 Zusammenführung von $y_h^{(x)}$ und $y_p^{(x)}$ nach dem Superpositionsprinzip ($y = y_h^{(x)} + y_p^{(x)}$)

$$\mathbf{y = y_h^{(x)} + y_p^{(x)} = (c_1 x + x_2) e^{2x} - \frac{15}{4} e^{-2x}}$$