Zeige durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ für die gilt $n > 0$:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

Berechne mit Hilfe der Polarkoordinaten und stelle das Ergebnis wieder in der Form $a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ da.

$$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{100}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{i}{2^i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{2n+4}{2^{n+1}} + \frac{n+1}{2^{n+1}} \\
&= 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}} \ q.e.d
\end{aligned}$$

$$\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{100}$$

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\
r &= \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tan\phi &= -1 \\
\phi &= \frac{3\pi}{4}
\end{aligned}$$

$$\left[1, \frac{3\pi}{4}\right]^{100} = \left[1^{100}, 100 \cdot \frac{3\pi}{4}\right] = [1, 75\pi] = [1, \pi]$$

$$\begin{aligned}
a &= 1 \cdot \cos\pi = 1 \\
b &= 1 \cdot \sin\pi = 0
\end{aligned}$$

$$\left(-\tfrac{\sqrt{2}}{2} + \tfrac{\sqrt{2}}{2} i\right)^{100} = -1$$