Potenzreihen: Ableitung, Eindeutigkeit

Eine Potenzreihe "um x_0" ist eine unendliche Reihe der Form $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$.
Zur Erinnerung: Es gibt dann ein $0 \leq R \leq \infty$ (Konvergenzradius) s.d. für $I := (x_0 - R, x_0 + R)$:
Wenn $x \in I$, dann konvergiert $g(x)$ (sogar absolut);
und wenn $|x - x_0| > R$ dann konvergiert/existiert $g(x)$ nicht.

Theorem (Ohne Bew.)

Angenommen $R > 0$. Dann ist $g(x) : I \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, und $a_n = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!}$.

Bemerkung: Das impliziert: Wenn es ein $r > 0$ gibt so dass für alle x mit $|x - x_0| < r$ gilt: $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ ist definiert und gleich $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$; dann ist $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Bew.: $f = g$, daher $f^{(n)} = g^{(n)}$, daher $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = \frac{g^{(n)}(x_0)}{n!} = b_n$. $\square$

Taylorreihen

Sei nun $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar, x_0 in (a, b).
Beachte: I.A. existiert $\lim_{x \to a} f(x)$ nicht.
(Beispiele für solche $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$: $\frac{1}{x}$, oder $\sin(\frac{1}{x})$, etc.)

Definition

Die Taylorreihe von f um x_0 ist $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

Wir können (siehe Bsp) i.A. nicht hoffen dass $g(a)$ gegen $f(a)$ konvergiert.
I.A. können wir nur auf sinnvolle Konvergenz für $a < x < b$ hoffen, d.h., nur auf Konvergenzradius $R^* := \min(|a - x_0|, |b - x_0|)$.

Informelles Theorem

Alle "anständigen" (richtig: "analytischen") Funktionen f erfüllen:

- Der Konvergenzradius R von g ist "maximal", d.h. $\geq R^*$.
- Für $|x - x_0| < R$ gilt: $f(x) = g(x)$.

Bemerkung: "Analytisch" wird über komplexe Differenzierbarkeit definiert.

Arithmetik der Taylorreihen/Potenzreihen

Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$, beide mit Konvergenzradius $\geq R$ (wobei $R > 0$).
Dann gilt (und die folgenden Potenzreihen haben Konvergenzradius $\geq R$):

- f ist auf $(x_0 - R, x_0 + R)$ differenzierbar, und $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n(x - x_0)^{n-1}$.
- $f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)(x - x_0)^n$.
- $f(x) \cdot g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$ mit $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ (Cauchy-Produkt).

Taylorreihen/Potenzreihen: Beispiele

- Für $f(x) = e^x$ ist $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Wir bekommen also:

  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$. Konvergenzradius ∞.

  Das ist eine wichtige Darstellung,
  und dient als Definition für andere Begriffe der Exponentiation.
  Z.B. e^A für eine lineare Abbildung (Matrix) A, etc.
- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \pm \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$
- Im Komplexen ergibt das $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$
  (und insbesondere das beliebte $e^{i\pi} = -1$).

Taylorreihen/Potenzreihen: Beispiele (Forts.)

- (Geometrischer Reihe)
  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.
  Konvergenzradius 1, d.h. Konvergenz für $|x| < 1$ bzw $x \in (-1, 1)$.
- Wenn wir $-x$ schreiben statt x:
  $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 \pm \cdots \sum(-1)^n x^n$. Konvergenzradius wieder 1.
- Äquivalent, mit $y := 1 + x$, d.h. $x = y - 1$, bekommen wir die Taylorreihe um $y_0 = 1$:
  $\frac{1}{y} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(y-1)^n$.
  Der Konvergenzradius (um $y_0 = 1$) ist natürlich wiederum 1, d.h. Konvergenz für $|y - 1| < 1$, d.h. für $y \in (0, 2)$.
- $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \pm \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$. Konvergenzradius 1.

  Äquivalent: $\ln(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(y-1)^n$, der Konvergenzradius (diemal um 1) ist wiederum 1.

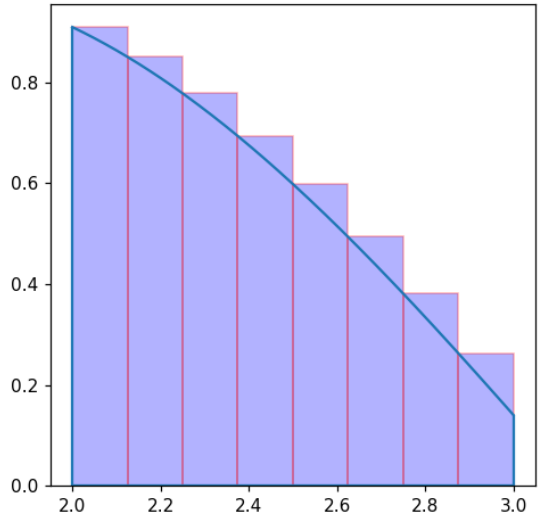
Integralrechnung

Vorschau: Integration als Umkehrung der Ableitung

- Die Ableitung, d.h. das Bilden von $f'(x)$ aus $f(x)$, ist von fundamentaler Bedeutung in zahllosen Anwendungen.
- Klassisches Beispiel: Sei $s(t)$ Ort/Position in Abhängigkeit von der Zeit t. Dann ist $v(t) := \frac{ds}{dt}(t)$ die Geschwindigkeit zur Zeit t.
- Die Umkehrung dieser Operation ist natürlich ebenfalls konzeptionell wichtig und enorm nützlich: Gegeben $f(x)$, wir suchen ein $F(x)$ mit $F'(x) = f(x)$. So ein F heißt "Stammfunktion" oder "(unbestimmtes) Integral" von f, geschrieben $F(x) = \int f(x)dx$
- In unserem Beispiel: Angenommen $v(t)$ ist gegeben. D.h. wir wissen zB wie schnell ein Auto zu jedem Zeitpunkt fährt. Wo befindet es sich zum Zeitpunkt t?
- Gesucht ist also $s(t)$ mit $s'(t) = v(t)$, d.h. eine Stammfunktion von v.

Vorschau: Integral als Fläche

- Das Integral hat noch eine andere Bedeutung/Intuition, als "infinitesimales Summen-Produkt".
  In dieser Form heißt es "bestimmtes Integral".
- Besonders anschaulich als "Fläche unter einer Kurve":
  Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq 0$.
  Wie können wir die Fläche, begrenzt durch a, b, 0 und $f(x)$ berechnen (oder erst mal überhaupt definieren)?



- Approximation durch Rechtecke.
- Mehr Rechtecke $\to$ genauer. Sei $A(n)$ die Approximation durch n Rechtecke.
- Dann: $\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} A(n)$ ist die Fläche.

  (Dimensionen: $f(x)$ und dx sind Längen.

  Ergebnis ist Länge x Länge = Fläche.)

Vorschau: Integration als "Summenprodukt"

Dieses Konzept des "infinitesimales Summen-Produkts" ist viel allgemeiner anwendbar als nur auch Flächen. Wieder das Beispiel Geschwindigkeit:

- Wenn sich ein Auto, beginnend zur Zeit $t = 0$, eine h lang mit 10 km/h bewegt, und danach 2h mit 20 km/h, dann hat es offenbar zum Endzeitpunkt $t = 3$ (in Stunden) folgenden Weg zurückgelegt: $1\mathrm{h} \cdot 10\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 2\mathrm{h} \cdot 20\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 50\mathrm{km}$.
- Wenn man die Geschwindigkeit zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = b$ öfter misst, beginnend bei Zeit $t = 0$, in b/δ vielen (kleinen) Zeitspannen δ, dann bekommt man die "genauere" Rechnung $s(b) = \sum_{n=0}^{b/\delta} v(n \cdot \delta) \cdot \delta$.
  (v hat die Dimension Weg/Zeit, und δ Zeit, das Produkt also Weg. b/δ ist dimensionslos (Zeit/Zeit).)
- Im Übergang zu infinitesimalen δ bekommt man wieder das "infinitesimale Summen-Produkt" $s(b) = \int_0^b v(t)dt$.

Zusammenhang unbestimmtes und bestimmtes Integral

- Es gilt $\int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt = \int_a^d f(t)dt$.
- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Schreibe $F(x)$ für $\int_a^x f(t)dt$, für $x \in (a, b)$.
- $F(x + \delta)$ ist dann $F(x) + \int_x^{x+\delta} f(t)dt$.
- Für ausreichend kleine δ (und stetiges f) ist $\int_x^{x+\delta} f(t)dt \sim f(x)\delta$.
- Es ist also $F(x + \delta) \sim F(x) + f(x) \cdot \delta$.
- Das heißt nichts anderes also: $F'(x) = f(x)$, d.h. F ist Stammfunktion (unbestimmtes Integral) von f.

Unbestimmtes Integral: Definition

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Definition

$F : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist das (oder: ein) unbestimmte Integral von f, auch: Stammfunktion, wenn $F'(x) = f(x)$ für $x \in [a, b]$.

- Es gilt: F ist eindeutige bis auf eine additive Konstante.
  Beweis: Seien F, G Integrale von f sind. Dann ist $(F - G)' = f' - f' = 0$. Nach dem Mittelwertsatz ist $F - G$ daher konstant c, d.h. $F(x) = G(x) + c$. □
- Ein Integral ist (nach Definition) differenzierbar, insbesondere stetig.
- Im Allgemeinen muss ein f keine Stammfunktion haben. Ein Beispiel dafür: $\text{sign}(x)$ (gibt Problem bei 0).
- Wenn f ein Integral hat, muss es nicht stetig sein. Es gilt aber:

Theorem (Ohne Beweis)

Wenn $f(x)$ stetig ist, dann hat f ein Integral.

Konkrete Integrale

- $\int x^r dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$, für $r \neq -1$
- $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x)$ für $x > 0$.
  (Allgemeiner: $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|)$ für $x \neq 0$.)
- $\int e^x dx = e^x$
- $\int \sin(x) dx = -\cos(x)$
- $\int \cos(x) dx = -\sin(x)$
- $\int \operatorname{sign}(x) dx$ gibt es nicht; 0 ist das Problem.
  Natürlich ist $f := \operatorname{sign}(x) \restriction (-\infty, 0) = -1$, d.h. $\int f = -x$;
  und $g := \operatorname{sign}(x) \restriction (0, \infty) = 1$, d.h. $\int f = x$.

Integrale: Arithmetik

- $\int(f+g) = (\int f) + (\int g)$.
  (Wichtig.) In Interpretation als Summe trivial.
  In Interpretation als Fläche "Prinzip von Cavalieri".
- $\int r \cdot f(x)dx = r \cdot \int f(x)dx$ für $r \in \mathbb{R}$.
- Genau wie bei der Summe ist $\int(f \cdot g)$ i.A. NICHT $(\int f) \cdot (\int g)$.
  Bsp: $f(x) = g(x) = f(x)g(x) = 1$. Dann $\int f = \int g = \int(fg) = x + c$ aber $(\int f)(\int g) = x^2 + c$.
- Bemerkung: Es gilt: $(F \cdot G)' = F'G + G'F$, d.h.
  $\int(FG') = FG - \int(G'F)$ ("Partielles Integrieren")
- Bemerkung: Es gilt: $\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x))$, wenn
  $F = \int f(x)dx$ ("Substitutionsregel")
- Potenzreihen: Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (mit Konvergenzradius > 0). Dann ist $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ (mit gleichem Konvergenzradius).

Integration: Bemerkungen

- Integration ist "schwierig": Die Integrale sehr einfache Funktionen haben oft keine einfache Darstellung mehr (und selbst wenn sie eine haben ist sie oft nur schwer zu finden).
- (Differenzieren ist einfach, es ist also insbesondere einfach zu überprüfen ob ein "einfaches" F tatsächlich Integral von f ist.)
- Beispiele von Funktionen deren Integral keine einfache Darstellung hat: $\frac{\sin x}{x}$ und e^{x^2}.
- Diese Integrale sind sehr "anständige" Funktionen, können auch sehr nützlich sein, effizient berechenbar, etc. (Wir werden später ein besonders wichtiges Beispiel erwähnen.) Aber sie lassen sich eben nicht "einfach" ("elementar") aufschreiben.
- Computeralgebrasysteme (wolfram alpha etc) können helfen schön darstellbare Integrale zu finden bzw. nicht darstellbare zu benennen. (Fertigkeit im Integrieren ist in Physik etc trotzdem von großer Bedeutung.)

Bestimmtes Integral: Stückweise setig

Definition

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig, wenn es $a := x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ gibt und es $g_i : [x_i, x_{i+1}] \to \mathbb{R}$ stetig gibt mit $g_i \restriction (x_i, x_{i+1}) = f \restriction (x_i, x_{i+1})$ für alle $0 \leq i < n$.

- f stückweise stetig impliziert daß f stetig ist bei allen ausser endlich vielen x. (Die möglichen Ausnahmen sind die x_i der Definition.)
- Die Umkehrung gilt nicht: Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 0$ für $x = 0$ und $f(x) = \frac{1}{x}$ sonst. Dann ist f überall stetig ausser bei 0, aber nicht stückweise stetig.
- $\mathrm{sign}(x)$ (eingeschränkt auf jedes $[a, b]$) ist stückweise stetig.
- Wenn f stückweise stetig ist, dann ist $f''[a, b]$ eine Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Intervalle (und insbesondere beschränkt).
- Wenn $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig ist und $a \leq x \leq y \leq b$, dann ist $f \restriction [x, y]$ stückweise stetig.

Bestimmte Integrale

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stückweise stetig.

Definition

- $\int_a^b f(x)dx := \lim_{N\to\infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(a + i \cdot \frac{b-a}{N}) \cdot \frac{b-a}{N}$
- Setze $\int_a^a f(x)dx := 0$ und $\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$

Theorem (Ohne Beweis)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

- *Sei f stückweise stetig. Dann existiert $\int_a^b f(x)d(x)$.*
- *Sei f stetig, $x_0 \in [a, b]$ und setze $F(x) := \int_{x_0}^x f(t)dt$ (für $x \in [a, b]$). Dann ist $F'(x) = f(x)$. D.h. F ist eine Stammfunktion von f.*
- *Sei $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f. Dann ist $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.*