Runde 2, Beispiel 8

LVA 118.181, Übungsrunde 2, 27.10.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 25.10.2006

1 Angabe

Man bestimme die Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$(1 + x^3) \cdot y' - x^2 \cdot y = 0, \qquad y(1) = 2$$

2 Theoretische Grundlagen: Trennbare Differentialgleichungen

Ergibt sich (eventuell nach Umformung) eine Differentialgleichung in der Form

$$y' = f(x) \cdot g(x),$$

welche stetige, auf den Intervallen $I \subseteq \mathbb{R}(x, x_0 \in I)$ und $J \subseteq \mathbb{R}(y, y_0 \in J)$ stetig definierte Funktionen f und g besitzt, sind zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $g(y) \neq 0$ - durch **Trennung der Variablen (Veränderlichen)** ergibt sich eine exakte Differentialgleichung in der Form:

   $$f(x) - \frac{1}{g(y)} \cdot y' = 0$$

   und der Stammfunktion ($x, x_0 \in I$, $y, y_0 \in J$):

   $$U(x, y) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi - \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)}$$

2. $g(\eta) = 0, \eta \in J$ - es gilt: $y(x) = \eta$, $x \in I$ ist eine konstante Lösung.

Für trennbare Differentialgleichungen ($x_0 \in I$, $y_0 \in J$) besagt der **Existenz- und Eindeutigkeitssatz**, dass das Anfangswertproblem

$$y' = f(x) \cdot g(x), \qquad y(x_0) = y_0,$$

lokal eindeutig lösbar ist wenn gilt:

1. $g(y_0) \neq 0$, oder
2. $|g(y)| < L \cdot |y - y0|$ in einer Umgebung von y_0, $L > 0$ konstant (`Lipschitz`).

Das **Lösungsverfahren** für $y' = f(x) \cdot g(x)$ lautet allgemein:

1. Sämtliche Nullstellen von $\eta \in J$ bestimmen - $y(x) = \eta$ ist jeweils eine partikuläre Lösung
2. Trennung der Variablen ('y, dy nach links; x, dx nach rechts')
$$\frac{1}{g(y)}\,dy = f(x)\,dx$$
3. Unbestimmte Integration beider Seiten:
$$G(y) := \int \frac{dy}{g(y)}, \qquad F(x) := \int f(x)\,dx.$$
Allgemeine implizite Lösung lautet:
$$G(y) - F(x) = x, \qquad c \in \mathbb{R}.$$
4. Anfangswertproblemlösung: Wenn $g(y_0) \neq 0, c_0 := G(y_0) - F(x_0)$. Soferne möglich $G(y) - F(x) = c - 0$ nach y auflösen.

   Wenn $g(y_0) = 0$, dann ist $y(x) = y_0$ die Lösung.

3 Theoretische Grundlagen: Integralrechnung - Substitutionsmethode

Aus der Kettenregel $\frac{d}{dx}F(g)x = F'(g(x))g'(x)$ folgt $(F'(x) = f(x))$:
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + c$$
Es existieren zwei Substitutionsmethoden:

- Substitution Version 1 - Berechnung von $\int f(g(x))g'(x)\,dx$
  1. Substitution $g(x) = t$ und $g'(x)\,dx = dt$
  2. Berechnung der Stammfunktion $\int f(t)\,dt = F(t) + c$
  3. Rücksubstitution: $t = g(x), F(t) = F(g(x))$
  4. Insgesamt:
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F(g(x)) + c$$
- Substitution Version 2 - Berechnung von $\int f(x)\,dx$
  1. Substitution $x = g(t)$, $dx = g'(t)\,dt$ mit einer geeigneten, umkehrbaren Funktion g
  2. Berechnung von $\int f(g(t))g'(t)\,dt = H(t) + c$
  3. Auflösung $x = g(t)$ nach t, d.h. $t = h(x)$ ist dann
$$\int f(x)\,dx = H(h(x)) + c$$

4 Lösung des Beispiels

4.1 Umformung für Trennung der Variablen

$$(1+x^3)\cdot y' - x^2\cdot y = 0, \qquad y(1) = 2$$
$$\frac{y'}{y} = \frac{x^2}{1+x^3}$$

4.2 Unbestimmte Integration beider Seiten

Integration der linken Seite:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|$$

Integration der rechten Seite:

$$\int \frac{x^2}{1+x^3}\,dx =$$
$$1+x^3 = u \qquad \Rightarrow \qquad 3x^2 = \frac{du}{dx}$$
$$\int \frac{x^2}{u}\cdot\frac{1}{3x^2}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\ln|u| = \frac{1}{3}\cdot\ln|1+x^3|$$
$$\ln|y| = \ln|1+x^3| + \check{C} \qquad |\text{Entlogarithmieren}$$
$$\mathbf{y(x) = C}\cdot\sqrt[3]{1+x^3} \qquad \text{Allgemeine Lösung}$$

4.3 Lösung des Anfangswertproblems $y(1) = 2$

$$y(1) = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 2 = C\cdot\sqrt[3]{1+1^3} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} \qquad \Rightarrow$$
$$\mathbf{y(x) = 2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{2}+\frac{x^3}{2}}$$