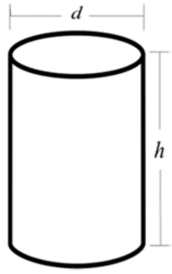
Aufgabe 3

Man gebe eine Parametrisierung für die Mantelfläche eines Drehzylinders mit dem Radius R und der z-Achse als Rotationsachse an. Für welche Parameterwerte erhält man den Punkt $P\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}\right)$ auf der Zylinderoberfläche?

Gesucht sind ferner die Parameterdarstellungen für folgende drei Kurven durch den Punkt P auf der Mantelfläche:



a) Eine Meridianlinie (d.h. Parallele zur Zylinderachse)

b) Einen Breitenkreis

c) Eine Schraubenlinie mit der Ganghöhe π

Die Mantelfläche eines Drehzylinders berechnet sich mit: $M = 2r * \pi * h$.
Die allgemeine Parameterdarstellung ist:

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

Wir wissen, dass eine kreisrunde Grundfläche das Verhältnis $x^2 + y^2 = r^2$ besitzt. Somit ist die x-Position von der y-Position und umgekehrt abhängig. Das gleiche Verhältnis gilt auch bei: $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Somit können wir für unsere Funktion definieren:

$$\begin{pmatrix} R * \cos\varphi \\ R * \sin\varphi \\ h \end{pmatrix}$$

Logischerweise kann man hier R, φ, und h frei wählen. Wir haben also drei Parameter:

$$\vec{x}(R, \varphi, h) = \begin{pmatrix} R * \cos\varphi \\ R * \sin\varphi \\ h \end{pmatrix}; \quad R, h \in \mathbb{R}; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

Setzen wir den Punkt P aus der Angabe ein, erhalten wir Folgendes:

$$R * \cos\varphi = R * \sin\varphi = \frac{R}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\varphi = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$$
$$h = \frac{3\pi}{4}$$

a) Meridianlinie

Die Meridianlinie verläuft parallel zur z-Achse durch den Punkt P. Die Höhe ist dabei variabel, x und y sind jedoch fest.

$$\overrightarrow{x_M}(t) = \begin{pmatrix} \frac{R}{\sqrt{2}} \\ \frac{R}{\sqrt{2}} \\ t \end{pmatrix}$$

b) Breitenkreis

Der Breitenkreis ist ein „Ring“ um den Zylinder in der Höhe $\frac{3\pi}{4}$. Damit ist z fest, x und y sind variabel, aber voneinander abhängig.

$$\overrightarrow{x_B}(\varphi) = \begin{pmatrix} R * \cos\varphi \\ R * \sin\varphi \\ \frac{3\pi}{4} \end{pmatrix}$$

c) Schraubenlinie

Eine Schraubenlinie „schlängelt" sich an dem Zylinder wie eine Spirale hoch. Es sind also alle drei Parameter variabel, durch die vorgegebene Ganghöhe jedoch voneinander abhängig. Eine kleine Schwierigkeit ist, dass die Schraubenlinie durch den Punkt P gehen muss. Da bei $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow R\cos t = \frac{R}{\sqrt{2}}$ gilt, muss bei $t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow z(t) = \frac{3\pi}{4}$ gelten.

$$Ganghöhe\ g = 2\pi h \Rightarrow h = \frac{1}{2}$$

Somit ist die z-Funktion $\frac{t}{2}$ plus einen Offset, damit der Punkt P bei $\frac{\pi}{4}$ auch getroffen wird:

$$z\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8} \Rightarrow \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8} = Offset$$

$$\overrightarrow{x_S}(t) = \begin{pmatrix} R * \cos t \\ R * \sin t \\ \frac{t}{2} + \frac{5\pi}{8} \end{pmatrix} \quad t \geq 0$$