1) Gegeben sei die Funktion:

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad f(x)=(x-5)\cdot e^{-2x}$$

Bestimme alle Nullstellen, lokalen Extremstellen und Grenzwerte bei $\pm\infty$. Hat die Funktion auch globale Extremstellen? Wenn ja, bestimme diese.

(7 Punkte)

Lösung: Beachte: $e^{-2x}>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

a) Nullstellen (1 Punkt):

$f(x)=(x-5)\cdot e^{-2x}=0 \iff x-5=0 \iff x=5.$

Also gibt es genau eine Nullstelle $(5,0)$.

b) Lokale Extremstellen (4 Punkte):

$f'(x)=e^{-2x}+(x-5)\cdot(-2)e^{-2x}=(-2x+11)\cdot e^{-2x}=0 \iff$

$\iff -2x+11=0 \iff x=\frac{11}{2}=5{,}5.$

$f''(x)=-2\cdot e^{-2x}+(-2x+11)\cdot(-2)e^{-2x}=(4x-24)e^{-2x}=(x-6)\cdot 4e^{-2x}$,

also gilt: $f''(x)\geq 0 \iff x-6\geq 0 \iff x\geq 6.$

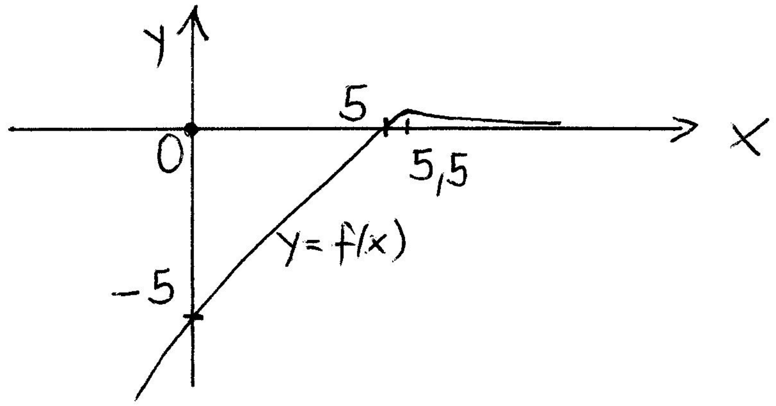
Da $\frac{11}{2}=5{,}5<6$, gilt also $f''(5{,}5)<0$, somit liegt an der Stelle $(5{,}5,\ f(5{,}5)$ ein lokales Maximum vor.

c) Grenzwerte und globale Extremstellen (2 Punkte):

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-5}{e^{2x}}=„\frac{\infty}{\infty}"=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=\frac{1}{\infty}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-5}{e^{2x}}=\frac{-\infty}{0}=-\infty,\ \text{da } e^{2x}>0.$$

Skizze der Funktion:




Globales Maximum: $(5{,}5,\ f(5{,}5))$

Es gibt kein globales Minimum.

2.) Mit Hilfe der Taylorentwicklung approximiere man die Funktion $f(x) = \ln(x+2)$ durch eine quadratische Polynomfunktion im Punkt $x_0 = 0$ und schätze den Fehler an der Stelle $x = 3$ mit Hilfe der Restglieddarstellung von Lagrange ab.

**Lösung:**

(7 Punkte)

**a) Taylorpolynom $p(x)$ 2. Grades für $x_0 = 0$ (5 Punkte):**

$f(x) = \ln(x+2)$ (wobei $x > -2$) $\Longrightarrow$

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} = (x+2)^{-1} \Longrightarrow f''(x) = -(x+2)^{-2} = -\frac{1}{(x+2)^2},$$

also ist

$$\begin{aligned} p(x) &= f(x_0) + (x-x_0)\cdot f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2} f''(x_0) = \\ &= f(0) + x\cdot f'(0) + \frac{x^2}{2}\cdot f''(0) = \\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}\cdot x + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{x^2}{2} = \\ &= \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}. \end{aligned}$$

**b) Restglied $R_3(x)$ von Lagrange (2 Punkte):**

$$f'''(x) = 2\cdot(x+2)^{-3} = \frac{2}{(x+2)^3} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} R_3(x) &= \frac{(x-x_0)^3}{6}\cdot f'''(\vartheta) = \frac{x^3}{6}\cdot\frac{2}{(\vartheta+2)^3} = \\ &= \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{(\vartheta+2)^3}, \end{aligned}$$

wobei $\vartheta$ zwischen 0 und $x$ liegt.

Für $x = 3$ gilt also: $R_3(3) = \frac{9}{(\vartheta+2)^3}$, $0 \le \vartheta \le 3$.

Daraus folgt:

$$\frac{9}{125} = \frac{9}{5^3} \le R_3(3) \le \frac{9}{2^3} = \frac{9}{8}.$$

3) Man berechne das folgende unbestimmte Integral

$$\int 5x^2 \cdot e^x \, dx.$$

(6 Punkte)

Lösung: Wir wenden zweimal die Formel der partiellen Integration an.

$$\int \underbrace{5x^2}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g'} \, dx = \underbrace{5x^2}_{f} \cdot \underbrace{e^x}_{g} - \int \underbrace{10x}_{f'} \cdot \underbrace{e^x}_{g} \, dx$$

Nebenrechnung: $\int \underbrace{10x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v'} dx = \underbrace{10x}_{u} \cdot \underbrace{e^x}_{v} - \int \underbrace{10}_{u'} \cdot \underbrace{e^x}_{v} dx =$

$$= 10x \cdot e^x - 10 \cdot e^x + D \Longrightarrow (\text{mit } C = -D)$$

$$\int 5x^2 \cdot e^x \, dx = 5x^2 \cdot e^x - 10x \cdot e^x + 10 \cdot e^x + C =$$

$$= (5x^2 - 10x + 10) \cdot e^x + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Probe:

$$\frac{d}{dx} (5x^2 - 10x + 10) \cdot e^x =$$

$$= (10x - 10) \cdot e^x + (5x^2 - 10x + 10) \cdot e^x =$$

$$= 5x^2 \cdot e^x$$