GDS-Übungsblatt 1

Aufgabe 1a

$U_0 : 17\, mod\, 2 = 1$
$U_1 : 8\, mod\, 2 = 0$
$U_2 : 4\, mod\, 2 = 0$
$U_3 : 2\, mod\, 2 = 0$
$U_4 : 1\, mod\, 2 = 1$

$\lfloor 0.843 * 2 \rfloor = \lfloor 1.686 \rfloor = 1$
$\lfloor 0.686 * 2 \rfloor = \lfloor 1.372 \rfloor = 1$
$\lfloor 0.372 * 2 \rfloor = \lfloor 0.744 \rfloor = 0$
$\lfloor 0.744 * 2 \rfloor = \lfloor 0.488 \rfloor = 1$

Round to nearest: $A = -(10001.111)_2$

$20\, mod\, 2 = 0$
$10\, mod\, 2 = 0$
$5\, mod\, 2 = 1$
$2\, mod\, 2 = 0$
$1\, mod\, 2 = 1$

$\lfloor 0.3125 * 2 \rfloor = \lfloor 0.6230 \rfloor = 0$
$\lfloor 0.6230 * 2 \rfloor = \lfloor 1.246 \rfloor = 1$
$\lfloor 0.246 * 2 \rfloor = \lfloor 0.492 \rfloor = 0$
$\lfloor 0.492 * 2 \rfloor = \lfloor 0.984 \rfloor = 0$
$\lfloor 0.984 * 2 \rfloor = \lfloor 1.968 \rfloor = 1$
$\lfloor 0.968 * 2 \rfloor = \lfloor 1.996 \rfloor = 1$
...

Round to nearest: $B = -(10100.010)_2$

Aufgabe 1b

$17\, mod\, 16 = 1$
$1\, mod\, 16 = 1$
0

$\lfloor 0.843 * 16 \rfloor = \lfloor 13.488 \rfloor = 13 = D$
$\lfloor 0.48 * 16 \rfloor = \lfloor 7.808 \rfloor = 7$
$\lfloor 0.808 * 16 \rfloor = \lfloor 12.928 \rfloor = 12 = C$

Round to nearest: $A = -(11.D8)_{16}$

$20\, mod\, 16 = 4$
$1\, mod\, 16 = 1$
0

$\lfloor 0.03125 * 16 \rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$
$\lfloor 0.5 * 16 \rfloor = \lfloor 8 \rfloor = 8$

Nichts zum Runden: $B = (14.08)_{16}$

Aufgabe 1c

$17\, mod\, 4 = 1$
$4\, mod\, 4 = 0$
$1\, mod\, 4 = 1$
0

$\lfloor 0.843 * 4 \rfloor = \lfloor 3.372 \rfloor = 3$
$\lfloor 0.372 * 4 \rfloor = \lfloor 1.488 \rfloor = 1$
$\lfloor 0.488 * 4 \rfloor = \lfloor 1.952 \rfloor = 1$

Round to nearest: $A = -(101.31)_4$

$20\, mod\, 4 = 0$
$5\, mod\, 4 = 1$
$1\, mod\, 4 = 1$
0

$\lfloor 0.03125 * 4 \rfloor = \lfloor 0.12500 \rfloor = 0$
$\lfloor 0.125 * 4 \rfloor = \lfloor 0.5 \rfloor = 0$
$\lfloor 0.5 * 4 \rfloor = \lfloor 2 \rfloor = 2$

Round to nearest, abrunden: $B = (110.00)_4$

Aufgabe 2a

0101 | 1111, | 1110 | 1100

(5   F,   E   C)$_{16}$

Aufgabe 2b

1 | 3 | 2, | 3 | 1

(01 11 10, 11 01)$_{2}$

Aufgabe 2c

22 | 11, | 10 | 20

(8   4,   3   6)$_{2}$

Aufgabe 3a

 110101,11

  11001,10

1001111,01

Aufgabe 3b

110101,112

-11001,10

011100,01

Aufgabe 3c

 110101,11 * (-10,01)

 11010111

    11010111

-1111000,1111

Aufgabe 3d

```
11001,10 : 100,1

= 110011 : 1001 = 101

 -1001

  001111

   -1001

    0110 R
```

Aufgabe 4a – Vorzeichen und Betrag

A:

```
2  |6  |4

010 110 100
```

Erstes Bit wird zum Vorzeichen. 1 heißt Minus.

```
Binär: 10 1011 0100

Hex:    2    B    4
```

B:

$$
\begin{aligned}
&295\, mod\, 2 = 1\\
&147\, mod\, 2 = 1\\
&73\, mod\, 2 = 1\\
&36\, mod\, 2 = 0\\
&18\, mod\, 2 = 0\\
&9\, mod\, 2 = 1\\
&4\, mod\, 2 = 0\\
&2\, mod\, 2 = 0\\
&1\, mod\, 2 = 1\\
&0
\end{aligned}
$$

Erstes Bit bleibt 0, da positive Zahl.

```
Binär: 01 0010 0111

Hex:    1    2    7
```

C:

+0 ist dasselbe wie -0, daher kann man C auf zwei versch. Arten darstellen.

Binär1: 00 0000 0000

Binär2: 10 0000 0000

Hex1: 0 0 0

Hex2: 2 0 0

Aufgabe 4b – Einerkomplement

A:

Wie in Aufgabe 4a, Umrechnung in binär:

2 |6 |4

0 010 110 100

Vorzeichenänderung = bitflip: 0 010 110 100 => 1 101 001 011

Binär: 11 0100 1011

Hex: 3 4 B

B:

Keine Vorzeichenänderung, keine Änderungen von 4a notwendig.

Binär: 01 0010 0111

Hex: 1 2 7

C:

+0 und -0 haben wieder zwei verschiedene Darstellungen.

Binär1: 00 0000 0000

Binär2: 11 1111 1111

Hex1: 0 0 0

Hex2: 3 F F

Aufgabe 4c

A:

Von Aufgabe 4b: 11 0100 1011

Addieren von 1, da negative Zahl.

Binär: 11 0100 1100

Hex: 3   4   C

B:

Für positive Zahlen ist Zweierkomplementdarst. dasselbe wie Einerkomplementdarst.

Binär: 01 0010 0111

Hex: 1   2   7

C:

In Zweierkomplementdarst. ist keine doppelte Darstellung von 0 möglich.

Binär1: 00 0000 0000

Hex1:   0   0   0

Aufgabe 4d

$2^9 - 1 = (111111111)_2$

A:

```
Binär: 01 1111 1111  ← e
      -00 1011 0100
       01 0100 1011
Hex:    1    4    B
```

B:

```
Binär: 01 1111 1111 ← e
      +01 0010 0111
       11 0010 0110
Hex:    3    2    6
```

C:

```
Binär: 01 1111 1111 ← e

Hex:    1    F    F
```

Aufgabe 5a

Erstes Bit ist Vorzeichen.

```
Z1  = 001 1101

Z2  =-010 1100

    -000 1111

Mit Vorzeichenbit: 1000 1111

Vorzeichenbit umgekehrt (Endergebnis): 0000 1111
```

Dezimal: $(0000\,1111)_2 = 15$

Aufgabe 5b

Z_1 = 0001 1101

Z_2 = 1010 1100

    1100 1001

         -1

    1100 1000

Alle Bits invertieren: 0011 0111

Dezimal:

$$(00110111)_2 = 55$$

Aufgabe 5c

Z_{e1} … Z_1 in Exzessdarstellung. $Z_{e1} = e + Z_1$

Z_{e2} … Analog zu Z_{e1}

$(a + b)_e$ … Die Exzessdarstellung der Summe von a und b

Z_{e1} = 0001 1101

Z_{e2} = 1010 1100

$Z_{e1} + Z_{e2}$ = 1100 1001 ← Doppelter Exzess! Einen entfernen…

− e = 1000 1011

$(Z_1 + Z_2)_e$ = 0011 1110 ← Exzessdarstellung der Summe von Z_1 und Z_2

− e = 1000 1011

$Z_1 + Z_2$ = −(0100 1101) ← Die Summe von Z_1 und Z_2 in binär

Umkehren von VZ:

e = 1000 1011

+ $|Z_1 + Z_2|$ = 0100 1101

$-(Z_1 + Z_2)_e$ = 1101 1000 ← Das Endergebnis in Exzessdarstellung

Dezimal:

$$-(Z_1+Z_2)=(0100\,1101)_2$$

$$\begin{aligned}
&(0100\,1101)_2\\
&=((((((((0*2+1)*2+0)*2+0)*2+1)*2+1)*2+0)*2+1)\\
&=((((((1*2+0)*2+0)*2+1)*2+1)*2+0)*2+1)\\
&=(((((2*2+0)*2+1)*2+1)*2+0)*2+1)\\
&=((((4*2+1)*2+1)*2+0)*2+1)\\
&=(((9*2+1)*2+0)*2+1)\\
&=((19*2+0)*2+1)\\
&=(38*2+1)\\
&=77
\end{aligned}$$

Aufgabe 6

$3_{10}=11_2$

$\lfloor 0.0125*2\rfloor=\lfloor 0.025\rfloor=0$
$\lfloor 0.025*2\rfloor=\lfloor 0.05\rfloor=0$
$\lfloor 0.05*2\rfloor=\lfloor 0.1\rfloor=0$
...

$\rightarrow(3.0125)_{10}=(11.000)_2$(auf 3 Nachkommastellen gestutzt)
$(11.000)_2=3_{10}$

Aufgabe 6a

Absoluter Rundungsfehler:
$\epsilon(x)=\square x-x=3-3.0125=0.0125$

Relativer Rundungsfehler:
$\rho(x)=\epsilon(x)/x=0.0125/3=0.0041\overline{6}=0.00416666666666...$

Aufgabe 6b

$a=11_2=3_{10}$
$b=(11.001)_2=(3.125)_{10}$

$a\leq 3.0125_{10}<b$

Aufgabe 7

A:

1. In Binär umrechnen:

   ```
     0,    3    C    8
   0000, 0011 1100 1000
   ```

2. Normalisierung:

   $(0.001111001)_2 * 2^0 = (1.111001)_2 * 2^{-3}$

3. Exponent berechnen:

   $$\begin{array}{ll} & 0111\ 1111 = 127_{10} \\ \underline{-} & \underline{0000\ 0011 = -3_{10}} \\ & 0111\ 1100 = 124_{10} \end{array}$$

Endergebnis:

```
1 Bit VZ | 8 Bit Exp | 23 Bit Mantisse
       0   0111 1100   1110 0100 0000 0000 0000 000
```

B:

4. In Binär umrechnen:

   ```
   -   1   4   2,   6   0   6
   - 001 100 010, 110 000 110
   ```

5. Normalisierung:

   $(1100010.11000011)_2 * 2^0 = (1.10001011000011)_2 * 2^6$

6. Exponent berechnen:

   $$\begin{array}{ll} & 0111\ 1111 = 127_{10} \\ \underline{+} & \underline{0000\ 0110 = 6_{10}} \\ & 1000\ 0101 = 133_{10} \end{array}$$

Endergebnis:

```
1 Bit VZ | 8 Bit Exp | 23 Bit Mantisse
       1   1000 0101   1000 1011 0000 1100 0000 000
```

Aufgabe 8

Aufgabe 8a

Exponent ist der Spezialwert $e_{min}-1$, daher handelt es sich um eine denormalisierte Zahl und das implizite Mantissenbit muss 0 sein. Da die restlichen Mantissenstellen auch 0 sind, ist die gesamte Mantisse 0 und die entsprechende Dezimalzahl auch. Das Vorzeichen macht 0 zu -0, aber das ist dasselbe.

Aufgabe 8b

Exponent: $e_{min}-1$
→ es handelt sich um eine denormalisierte Zahl, der eigentliche Exponent ist $e_{min}=-6$

Binärzahl: 0.01_2*2^{-6}
Dezimalzahl: $0.01_2*2^{-6}=1_2*2^{-8}=2^{-8}=1/256=0.00390625_{10}$

Aufgabe 8c

Exponent ist der Spezialwert $e_{max}+1$ und der Wert kann nicht NaN sein da alle Mantissenbits null sind, die Codierung entspricht daher $+\infty$.

Aufgabe 8d

NaN, da der Exponent aus lauter 1en besteht und die Mantisse > 0 ist. Das Vorzeichenbit ist zwar 1, aber $-NaN$ ist dasselbe.

Aufgabe 8e

Exponent: $1110_2=14_{10}$
Mantisse: 1.1_2
Binärwert: 1.1_2*2^{14}
Dezimalwert: $1.1_2*2^{14}=11_2*2^{14}=3*2^{14}=49152_{10}$