

GRUNDZÜGE DER INFORMATIK

Kathrin Apfelthaler

e0225369@student.tuwien.ac.at

INHALT

☐ BOOLESCHE ALGEBRA

- Einführung
 - Normalformen
 - Vereinfachen von Funktionen
 - ☐ Verfahren nach Karnaugh & Veitch
 - ☐ Verfahren nach Quine & McCluskey
-

EINFÜHRUNG

- Boolesche Algebra arbeitet mit den Werten *wahre Aussage(1)* und *falsche Aussage(0)*
- Operationen: $\&$, \vee , \neg

| $\&$ | 0 | 1 |
|------|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |

| \vee | 0 | 1 |
|--------|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| \neg | |
|--------|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

EINFÜHRUNG

□ Gesetze

■ Kommutativ

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \& y = y \& x$$

■ Assoziativ

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$$(x \& y) \& z = x \& (y \& z)$$

■ Distributiv

$$x \vee (y \& z) = (x \vee y) \& (x \vee z)$$

$$x \& (y \vee z) = (x \& y) \vee (x \& z)$$

■ Absorption

$$x \vee (x \& y) = x$$

$$x \& (x \vee y) = x$$

EINFÜHRUNG

□ De Morgansche Gesetze

- $\neg(x \vee y) = \neg x \ \& \ \neg y$

- $\neg(x \ \& \ y) = \neg x \vee \neg y$

NORMALFORMEN

- Vollform: jede Variable kommt genau einmal vor
 - **Vollkonjunktion (Minterm)**: Ausdruck, in dem sämtliche vereinbarten Variablen konjunktiv verbunden sind
 - **Volldisjunktion (Maxterm)**: Ausdruck, in dem sämtliche vereinbarten Variablen disjunktiv verbunden sind
-

NORMALFORMEN

□ Disjunktive Normalform:

Darstellungsart, bei der eine Reihe von Vollkonjunktionen disjunktiv verknüpft sind

□ Konjunktive Normalform:

Darstellungsart, bei der eine Reihe von Volldisjunktionen konjunktiv verknüpft sind

VEREINFACHEN VON FUNKTIONEN

- ❑ Irrelevante Variablen werden eliminiert
 - ❑ Minimierung von Schaltelementen
-

VEREINFACHEN VON FUNKTIONEN

- Verfahren von Karnaugh & Veitch
 - 4 oder weniger Variablen
 - Blöcke, die aus Vierecken zusammengebaut sind, wobei jedes dieser Felder einer Vollkonjunktion entspricht
-

KARNAUGH & VEITCH

| | | |
|----------|---|----------|
| | b | $\neg b$ |
| a | | |
| $\neg a$ | | |

| | | | |
|----------|---|----------|----------|
| | b | $\neg b$ | |
| a | | | $\neg c$ |
| a | | | c |
| $\neg a$ | | | c |
| $\neg a$ | | | $\neg c$ |

| | | | | | |
|----------|----------|---|----------|----------|----------|
| | b | b | $\neg b$ | $\neg b$ | |
| a | | | | | $\neg c$ |
| a | | | | | c |
| $\neg a$ | | | | | c |
| $\neg a$ | | | | | $\neg c$ |
| | $\neg d$ | d | d | $\neg d$ | |

KARNAUGH & VEITCH

☐ Vorgang

- „1“ eintragen, wenn entsprechende Vollkonjunktion in Normalform der Angabe vorkommt
 - „0“ eintragen, sonst
 - „1“-Blöcke zusammenfassen
 - ☐ Felder, die sich außen befinden, haben auch Nachbarn: die gegenüberliegenden Randfelder
-

KARNAUGH & VEITCH

□ Beispiele

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|--|--|---|
| 1 | | | 1 |
| | | | |
| | | | |
| 1 | | | 1 |

KARNAUGH & VEITCH

□ Beispiele

| | | | |
|---|--|---|---|
| | | | |
| | | 1 | 1 |
| 1 | | 1 | 1 |
| | | | |

| | | | |
|---|---|--|---|
| | 1 | | |
| | 1 | | |
| | | | |
| 1 | | | 1 |

| | | | |
|--|---|---|--|
| | | | |
| | 1 | | |
| | 1 | 1 | |
| | | | |

KARNAUGH & VEITCH

□ Beispiel 1

■ Angabe

$(a \ \& \ \neg b \ \& \ \neg c \ \& \ \neg d) \vee$

$(\neg a \ \& \ \neg b \ \& \ c \ \& \ d) \vee$

$(\neg a \ \& \ b \ \& \ c \ \& \ \neg d) \vee$

$(\neg a \ \& \ \neg b \ \& \ \neg c \ \& \ \neg d) \vee$

$(\neg a \ \& \ b \ \& \ \neg c \ \& \ \neg d) \vee$

$(a \ \& \ \neg b \ \& \ c \ \& \ \neg d) \vee$

$(a \ \& \ b \ \& \ c \ \& \ \neg d)$

| | | b | | $\neg b$ | | |
|----------|----------|----------|---|----------|---|----------|
| | | | | | | |
| a | $\neg a$ | | | | 1 | $\neg c$ |
| | a | 1 | | | 1 | c |
| $\neg a$ | a | 1 | | 1 | | |
| | $\neg a$ | 1 | | | 1 | $\neg c$ |
| | | $\neg d$ | d | $\neg d$ | | |

KARNAUGH & VEITCH

□ Beispiel 1

■ Lösung

$(a \& \neg b \& \neg d) \vee$

$(b \& c \& \neg d) \vee$

$(\neg a \& \neg c \& \neg d) \vee$

$(\neg a \& \neg b \& c \& d)$

KARNAUGH & VEITCH

□ Beispiel 2

■ Angabe

$(\neg a \ \& \ b \ \& \ \neg c \ \& \ d) \vee$

$(a \ \& \ b \ \& \ c \ \& \ d) \vee$

$(\neg a \ \& \ \neg b \ \& \ \neg c \ \& \ \neg d) \vee$

$(\neg a \ \& \ b \ \& \ c \ \& \ d) \vee$

$(\neg a \ \& \ \neg b \ \& \ \neg c \ \& \ d) \vee$

$(a \ \& \ b \ \& \ c \ \& \ \neg d)$

| | | b | | $\neg b$ | | | |
|---|----------|----------|---|----------|---|----------|--|
| | | $\neg c$ | | c | | | |
| a | $\neg a$ | | | | | | |
| | | 1 | 1 | | | | |
| | | | 1 | | | | |
| | | | 1 | 1 | 1 | | |
| | | $\neg d$ | | d | | $\neg d$ | |

KARNAUGH & VEITCH

□ Beispiel 2

■ Lösung

$(\neg a \ \& \ \neg b \ \& \ \neg c) \vee$

$(a \ \& \ b \ \& \ c) \vee$

$(\neg a \ \& \ b \ \& \ d)$

VEREINFACHEN VON FUNKTIONEN

- Verfahren von Quine & McCluskey
 - Beliebig viele Variablen
 - Systematisches Vorgehen mit mehreren Schritten
-

QUINE & McCLUSKEY

□ Schritt 1a

- Konjunktionen werden nach Anzahl der Negationen zu Gruppen zusammengefasst

□ Schritt 1b

- Zwei benachbarte Gruppen untersuchen & Terme paarweise auf Zusammenfassbarkeit überprüfen
-

QUINE & McCLUSKEY

- Hinweise zu Schritt 1b
 - Mehrfach auftretende Terme werden nur einmal berücksichtigt
 - Alle Zeilen, die nicht in einer Zusammenfassung enthalten sind, müssen auch übernommen werden
-

QUINE & McCLUSKEY

☐ Schritt 2

☒ Streichen unnötiger Terme

- ☐ Tabelle: Vollkonjunktionen (Angabe) als Spalten, reduzierte Terme als Zeilen
 - ☐ Kommt reduzierter Term in Vollkonjunktion vor, kennzeichnen durch „x“
 - ☐ Steht in einer Spalte nur ein „x“, muss dieser red. Term in Lösung aufgenommen werden
 - ☐ Alle Spalten, die in der Zeile des red. Terms auch ein „x“ stehen haben, können auch gestrichen werden
-

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 1

■ Angabe

1 $a b \neg c d e$

2 $\neg a \neg b c d e$

3 $a b \neg c d \neg e$

4 $a b c \neg d \neg e$

5 $\neg a b \neg c \neg d e$

6 $\neg a b c \neg d \neg e$

7 $a \neg b \neg c d \neg e$

8 $a \neg b c \neg d \neg e$

9 $\neg a \neg b \neg c d \neg e$

10 $\neg a \neg b \neg c \neg d e$

11 $\neg a \neg b c \neg d \neg e$

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 1

■ Schritt 1a

| | |
|------|--------------------------|
| 1,3 | $a b \neg c d$ |
| 3,7 | $a \neg c d \neg e$ |
| 4,6 | $b c \neg d \neg e$ |
| 4,8 | $a c \neg d \neg e$ |
| 5,10 | $\neg a \neg c \neg d e$ |
| 6,11 | $\neg a c \neg d \neg e$ |
| 7,9 | $\neg b \neg c d \neg e$ |
| 8,11 | $\neg b c \neg d \neg e$ |
| 2 | $\neg a \neg b c d e$ |

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 1

■ Schritt 1b

| | | |
|----------|--------------------------|----|
| 4,6,8,11 | $c \neg d \neg e$ | R1 |
| 1,3 | $a b \neg c d$ | R2 |
| 3,7 | $a \neg c d \neg e$ | R3 |
| 5,10 | $\neg a \neg c \neg d e$ | R4 |
| 7,9 | $\neg b \neg c d \neg e$ | R5 |
| 2 | $\neg a \neg b c d e$ | R6 |

□ Beispiel 1

■ Schritt 2

[illegible]

- Beispiel 1
 - Schritt 2

■ Schritt 2

[illegible]

[illegible]

QUINE & McCLUSKEY

■ Schritt 2

QUINE & McCLUSKEY

■ Schritt 2

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 1

■ Lösung

□ $L = R1 \vee R2 \vee R4 \vee R5 \vee R6$

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 2

■ Angabe

1 a b c d e

2 $\neg a$ b c d e

3 a b c $\neg d$ e

4 a $\neg b$ $\neg c$ d e

5 $\neg a$ b c $\neg d$ e

6 a $\neg b$ $\neg c$ $\neg d$ e

7 $\neg a$ $\neg b$ c d $\neg e$

8 a $\neg b$ c $\neg d$ $\neg e$

9 $\neg a$ $\neg b$ $\neg c$ d $\neg e$

10 $\neg a$ b $\neg c$ $\neg d$ $\neg e$

11 $\neg a$ $\neg b$ $\neg c$ $\neg d$ $\neg e$

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 2

■ Schritt 1a

| | |
|-------|-------------------------------|
| 1,2 | $b c d e$ |
| 1,3 | $a b c e$ |
| 2,5 | $\neg a b c e$ |
| 3,5 | $b c \neg d e$ |
| 4,6 | $a \neg b \neg c e$ |
| 7,9 | $\neg a \neg b d \neg e$ |
| 9,11 | $\neg a \neg b \neg c \neg e$ |
| 10,11 | $\neg a \neg c \neg d \neg e$ |
| 8 | $a \neg b c \neg d \neg e$ |

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 2

■ Schritt 1b

| | | |
|---------|-------------------------------------|----|
| 1,2,3,5 | $b \ c \ e$ | R1 |
| 4,6 | $a \ \neg b \ \neg c \ e$ | R2 |
| 7,9 | $\neg a \ \neg b \ d \ \neg e$ | R3 |
| 9,11 | $\neg a \ \neg b \ \neg c \ \neg e$ | R4 |
| 10,11 | $\neg a \ \neg c \ \neg d \ \neg e$ | R5 |
| 8 | $a \ \neg b \ c \ \neg d \ \neg e$ | R6 |

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 1

■ Schritt 2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| R1 | x | x | x | | x | | | | | | |
| R2 | | | | x | | x | | | | | |
| R3 | | | | | | | x | | x | | |
| R4 | | | | | | | | | x | | x |
| R5 | | | | | | | | | | x | x |
| R6 | | | | | | | | x | | | |

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 1

■ Schritt 2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| R1 | x | x | x | | x | | | | | | |
| R2 | | | | x | | x | | | | | |
| R3 | | | | | | | x | | x | | |
| R4 | | | | | | | | | x | | x |
| R5 | | | | | | | | | | x | x |
| R6 | | | | | | | | x | | | |

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 1

■ Schritt 2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| R1 | x | x | x | | x | | | | | | |
| R2 | | | | x | | x | | | | | |
| R3 | | | | | | | x | | x | | |
| R4 | | | | | | | | | x | | x |
| R5 | | | | | | | | | | x | x |
| R6 | | | | | | | | x | | | |

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 1

■ Schritt 2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| R1 | x | x | x | | x | | | | | | |
| R2 | | | | x | | x | | | | | |
| R3 | | | | | | | x | | x | | |
| R4 | | | | | | | | | x | | x |
| R5 | | | | | | | | | | x | x |
| R6 | | | | | | | | x | | | |

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 1

■ Schritt 2

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
|----|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|
| R1 | x | x | x | | x | | | | | | |
| R2 | | | | x | | x | | | | | |
| R3 | | | | | | | x | | x | | |
| R4 | | | | | | | | | x | | x |
| R5 | | | | | | | | | | x | x |
| R6 | | | | | | | | x | | | |

QUINE & McCLUSKEY

□ Beispiel 2

■ Lösung

□ $L = R1 \vee R2 \vee R3 \vee R5 \vee R6$
