

# GRUNDZÜGE DER INFORMATIK

---

Kathrin Apfelthaler

e0225369@student.tuwien.ac.at

# INHALT

---

- BOOLESCHE ALGEBRA
    - Einführung
    - Normalformen
    - Vereinfachen von Funktionen
      - Verfahren nach Karnaugh & Veitch
      - Verfahren nach Quine & McCluskey
-

# EINFÜHRUNG

---

- Boolesche Algebra arbeitet mit den Werten  
*wahre Aussage(1)* und  
*falsche Aussage(0)*
- Operationen:  $\&$ ,  $\vee$ ,  $\neg$

$\&$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\neg$	
0	1
1	0

# EINFÜHRUNG

---

## □ Gesetze

### ■ Kommutativ

$$x \vee y = y \vee x$$

$$x \wedge y = y \wedge x$$

### ■ Assoziativ

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$$

### ■ Distributiv

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

### ■ Absorption

$$x \vee (x \wedge y) = x$$

$$x \wedge (x \vee y) = x$$

# EINFÜHRUNG

---

## □ De Morgansche Gesetze

- $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$
- $\neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y$

# NORMALFORMEN

---

- Vollform: jede Variable kommt genau einmal vor
  - **Vollkonjunktion (Minterm)**: Ausdruck, in dem sämtliche vereinbarten Variablen konjunktiv verbunden sind
  - **Volldisjunktion (Maxterm)**: Ausdruck, in dem sämtliche vereinbarten Variablen disjunktiv verbunden sind
-

# NORMALFORMEN

---

## □ Disjunktive Normalform:

Darstellungsart, bei der eine Reihe von Vollkonjunktionen disjunktiv verknüpft sind

## □ Konjunktive Normalform:

Darstellungsart, bei der eine Reihe von Volldisjunktionen konjunktiv verknüpft sind

---

# VEREINFACHEN VON FUNKTIONEN

---

- Irrelevante Variablen werden eliminiert
- Minimierung von Schaltkreiselementen

# VEREINFACHEN VON FUNKTIONEN

---

- Verfahren von Karnaugh & Veitch
  - 4 oder weniger Variablen
  - Blöcke, die aus Vierecken zusammengebaut sind, wobei jedes dieser Felder einer Vollkonjunktion entspricht

# KARNAUGH & VEITCH

---

	b	$\neg b$
a		
$\neg a$		

	b	$\neg b$
a		
a		
$\neg a$		
$\neg a$		

	b	b	$\neg b$	$\neg b$
a				
a				
$\neg a$				
$\neg a$				

  

	$\neg d$	d	d	$\neg d$
$\neg d$				
d				
$\neg d$				
c				

# KARNAUGH & VEITCH

---

## Vorgang

- „1“ eintragen, wenn entsprechende Vollkonjunktion in Normalform der Angabe vorkommt
- „0“ eintragen, sonst
- „1“-Blöcke zusammenfassen
  - Felder, die sich außen befinden, haben auch Nachbarn: die gegenüberliegenden Randfelder

# KARNAUGH & VEITCH

---

## Beispiele

1	1	1	1

1	1	1	1
1	1	1	1

1			1
1			1

# KARNAUGH & VEITCH

---

## □ Beispiele

		1	1
1	1	1	1

	1		
	1		
1			1

	1		
	1	1	1

# KARNAUGH & VEITCH

---

## □ Beispiel 1

### ■ Angabe

$(a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$   
 $(\neg a \wedge \neg b \wedge c \wedge d) \vee$   
 $(\neg a \wedge b \wedge c \wedge \neg d) \vee$   
 $(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$   
 $(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$   
 $(a \wedge \neg b \wedge c \wedge \neg d) \vee$   
 $(a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$

	b	$\neg b$	
a			1
	1		1
	1		1
$\neg a$			
	1		1
		1	
			1
	$\neg d$	d	$\neg d$

# KARNAUGH & VEITCH

---

## □ Beispiel 1

### ■ Lösung

$(a \And \neg b \And \neg d) \Or$

$(b \And c \And \neg d) \Or$

$(\neg a \And \neg c \And \neg d) \Or$

$(\neg a \And \neg b \And c \And d)$

# KARNAUGH & VEITCH

---

## □ Beispiel 2

### ■ Angabe

$$(\neg a \wedge b \wedge \neg c \wedge d) \vee$$

$$(a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee$$

$$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge \neg d) \vee$$

$$(\neg a \wedge b \wedge c \wedge d) \vee$$

$$(\neg a \wedge \neg b \wedge \neg c \wedge d) \vee$$

$$(a \wedge b \wedge c \wedge \neg d)$$

	b	$\neg b$		
a	1	1		
		1		
$\neg a$	1	1	1	1
	$\neg d$	d	$\neg d$	
				$\neg c$
			c	
				$\neg c$

# KARNAUGH & VEITCH

---

## □ Beispiel 2

### ■ Lösung

$(\neg a \ \& \ \neg b \ \& \ \neg c) \vee$

$(a \ \& \ b \ \& \ c) \vee$

$(\neg a \ \& \ b \ \& \ d)$

# VEREINFACHEN VON FUNKTIONEN

---

- Verfahren von Quine & McCluskey
  - Beliebig viele Variablen
  - Systematisches Vorgehen mit mehreren Schritten

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Schritt 1a

- Konjunktionen werden nach Anzahl der Negationen zu Gruppen zusammengefasst

## □ Schritt 1b

- Zwei benachbarte Gruppen untersuchen & Terme paarweise auf Zusammenfassbarkeit überprüfen

# **QUINE & McCLUSKEY**

---

- Hinweise zu Schritt 1b
    - Mehrfach auftretende Terme werden nur einmal berücksichtigt
    - Alle Zeilen, die nicht in einer Zusammenfassung enthalten sind, müssen auch übernommen werden
-

# QUINE & McCLUSKEY

---

- Schritt 2
  - Streichen unnötiger Terme
    - Tabelle: Vollkonjunktionen (Angabe) als Spalten, reduzierte Terme als Zeilen
    - Kommt reduzierter Term in Vollkonjunktion vor, kennzeichnen durch „x“
    - Steht in einer Spalte nur ein „x“, muss dieser red. Term in Lösung aufgenommen werden
    - Alle Spalten, die in der Zeile des red. Terms auch ein „x“ stehen haben, können auch gestrichen werden

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 1

### ■ Angabe

1 a b  $\neg c$  d e

2  $\neg a$   $\neg b$  c d e

3 a b  $\neg c$  d  $\neg e$

4 a b c  $\neg d$   $\neg e$

5  $\neg a$  b  $\neg c$   $\neg d$  e

6  $\neg a$  b c  $\neg d$   $\neg e$

7 a  $\neg b$   $\neg c$  d  $\neg e$

8 a  $\neg b$  c  $\neg d$   $\neg e$

9  $\neg a$   $\neg b$   $\neg c$  d  $\neg e$

10  $\neg a$   $\neg b$   $\neg c$   $\neg d$  e

11  $\neg a$   $\neg b$  c  $\neg d$   $\neg e$

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 1

### ■ Schritt 1a

1,3	a b $\neg c$ d
3,7	a $\neg c$ d $\neg e$
4,6	b c $\neg d$ $\neg e$
4,8	a c $\neg d$ $\neg e$
5,10	$\neg a$ $\neg c$ $\neg d$ e
6,11	$\neg a$ c $\neg d$ $\neg e$
7,9	$\neg b$ $\neg c$ d $\neg e$
8,11	$\neg b$ c $\neg d$ $\neg e$
2	$\neg a$ $\neg b$ c d e

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 1

### ■ Schritt 1b

4,6,8,11	c $\neg d$ $\neg e$	R1
1,3	a b $\neg c$ d	R2
3,7	a $\neg c$ d $\neg e$	R3
5,10	$\neg a$ $\neg c$ $\neg d$ e	R4
7,9	$\neg b$ $\neg c$ d $\neg e$	R5
2	$\neg a$ $\neg b$ c d e	R6

# QUINE & McCLUSKEY

## Beispiel 1

## Schritt 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R1				X		X		X			X
R2	X		X								
R3			X					X			
R4					X						X
R5								X		X	
R6				X							

# QUINE & McCLUSKEY

## Beispiel 1

## Schritt 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R1				X		X		X			X
R2	X		X								
R3			X					X			
R4					X						X
R5								X		X	
R6				X							

# QUINE & McCLUSKEY

## Beispiel 1

## Schritt 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R1				X		X		X			X
R2	X		X								
R3			X					X			
R4					X					X	
R5								X		X	
R6				X							

# QUINE & McCLUSKEY

## Beispiel 1

## Schritt 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R1				X		X		X			X
R2	X		X								
R3			X					X			
R4					X						X
R5							X		X		
R6				X							

# QUINE & McCLUSKEY

## Beispiel 1

## Schritt 2

# QUINE & McCLUSKEY

---

- Beispiel 1
  - Lösung
    - $L = R_1 \vee R_2 \vee R_4 \vee R_5 \vee R_6$

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 2

### ■ Angabe

1 a b c d e

2  $\neg a$  b c d e

3 a b c  $\neg d$  e

4 a  $\neg b$   $\neg c$  d e

5  $\neg a$  b c  $\neg d$  e

6 a  $\neg b$   $\neg c$   $\neg d$  e

7  $\neg a$   $\neg b$  c d  $\neg e$

8 a  $\neg b$  c  $\neg d$   $\neg e$

9  $\neg a$   $\neg b$   $\neg c$  d  $\neg e$

10  $\neg a$  b  $\neg c$   $\neg d$   $\neg e$

11  $\neg a$   $\neg b$   $\neg c$   $\neg d$   $\neg e$

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 2

### ■ Schritt 1a

1,2      b c d e

1,3      a b c e

2,5       $\neg a$  b c e

3,5      b c  $\neg d$  e

4,6      a  $\neg b$   $\neg c$  e

7,9       $\neg a$   $\neg b$  d  $\neg e$

9,11       $\neg a$   $\neg b$   $\neg c$   $\neg e$

10,11       $\neg a$   $\neg c$   $\neg d$   $\neg e$

8      a  $\neg b$  c  $\neg d$   $\neg e$

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 2

### ■ Schritt 1b

1,2,3,5	b c e	R1
4,6	a $\neg$ b $\neg$ c e	R2
7,9	$\neg$ a $\neg$ b d $\neg$ e	R3
9,11	$\neg$ a $\neg$ b $\neg$ c $\neg$ e	R4
10,11	$\neg$ a $\neg$ c $\neg$ d $\neg$ e	R5
8	a $\neg$ b c $\neg$ d $\neg$ e	R6

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 1

### ■ Schritt 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R1	x	x	x		x						
R2				x		x					
R3						x			x		
R4								x		x	
R5									x		x
R6							x				

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 1

### ■ Schritt 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R1	x	x	x		x						
R2				x		x					
R3							x		x		
R4								x		x	
R5									x		x
R6								x			

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 1

### ■ Schritt 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R1	x	x	x		x						
R2				x		x					
R3							x		x		
R4								x		x	
R5									x		x
R6								x			

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 1

### ■ Schritt 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R1	x	x	x		x						
R2				x		x					
R3							x		x		
R4								x		x	
R5									x	x	
R6								x			

# QUINE & McCLUSKEY

---

## □ Beispiel 1

### ■ Schritt 2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
R1	x	x	x		x						
R2				x		x					
R3							x		x		
R4									x		x
R5									x	x	
R6								x			

# QUINE & McCLUSKEY

---

- Beispiel 2
  - Lösung
    - $L = R_1 \vee R_2 \vee R_3 \vee R_5 \vee R_6$