

15. Man bestimme die relativen Extrema der Funktion

$$f(x, y) = 4(x - 2)(y^2 + 10y) + 3x^3.$$

notwendige Bedingung: Besitzt f in $\vec{x}_0$ ein relatives Extremum, so gilt

$$f_{x_1}(\vec{x}_0) = 0, \dots, f_{x_n}(\vec{x}_0) = 0, \text{ kurz: } \text{grad } f(\vec{x}_0) = \vec{0}$$

hinreichende Bedingung (für $n = 2$): Gilt für $f(x, y)$, dass $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$,

sowie $D = (x_0, y_0) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0$, dann nimmt f in (x_0, y_0) ein relatives Extremum an,

und zwar für $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ein relatives Minimum und für $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ein relatives Maximum. Gilt $D = (x_0, y_0) < 0$, so liegt kein Extremum vor

$$f(x, y) = 4(x - 2)(y^2 + 10y) + 3x^3 = (4x - 8) \cdot (y^2 + 10y) + 3x^3 = 4xy^2 - 8y^2 + 40xy + 80y + 3x^3$$

$$f_x = 4 \cdot 1 \cdot (y^2 + 10y) + 9x^2 = 4y^2 + 40y + 9x^2$$

$$f_y = 4 \cdot (x - 2) \cdot (2y + 10) = 8 \cdot (x - 2) \cdot (y + 5) = (4x - 8) \cdot (2y + 10) = 8xy - 16y + 40x - 80$$

$$f_y \Rightarrow x \neq -2, y \neq -5$$

$$f_x = 4y^2 + 40y + 9 \cdot 2^2 = 4y^2 + 40y + 36 = 4 \cdot (y^2 + 10y + 9)$$

$$1y^2 = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{100}{4} - \frac{36}{4}} = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\frac{64}{4}} = -\frac{10}{2} \pm \frac{8}{2}$$

$$f_x \Rightarrow y_1 = -\frac{18}{2} = -9, y_2 = -\frac{2}{2} = -1$$

$$f_x = 4 \cdot (-5)^2 + 40 \cdot (-5) + 9 \cdot x^2 = 100 - 200 + 9x^2 = 9x^2 - 100$$

$$0 = 9x^2 - 100 \Rightarrow 100 = 9x^2 \Rightarrow \frac{100}{9} = x^2$$

$$f_x \Rightarrow x = \pm \frac{10}{3}$$

Nullstellen:

$$x_1 = 2, y_1 = -9$$

$$x_2 = 2, y_2 = -1$$

$$x_3 = +\frac{10}{3}, y_3 = -5$$

$$x_4 = -\frac{10}{3}, y_4 = -5$$

partielle Ableitungen für die Determinante:

$$f_{xx} = 18x$$

$$f_{xy} = 8y + 40 = 8 \cdot (y + 5)$$

$$f_{yy} = 8x - 16 = 8 \cdot (x - 2)$$

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 18x & 8y+40 \\ 8y+40 & 8x-16 \end{vmatrix} = 18x \cdot (8x-16) - (8y+40)^2$$

Nun für die Punkte in die Determinante einsetzen:

$$D(2,-9) = 18 \cdot 2 \cdot (8 \cdot 2 - 16) - (8 \cdot (-9) + 40)^2 = 36 \cdot 0 - (-32)^2 = -1024 < 0$$

$$D(2,-1) = 18 \cdot 2 \cdot (8 \cdot 2 - 16) - (8 \cdot (-1) + 40)^2 = 36 \cdot 0 - (32)^2 = -1024 < 0$$

$$D\left(+\frac{10}{3}, -5\right) = 18 \cdot \frac{10}{3} \cdot \left(8 \cdot \frac{10}{3} - 16\right) - (8 \cdot (-5) + 40)^2 = \frac{180}{3} \cdot \left(\frac{180-48}{3}\right) = 60 \cdot 44 = 2640 > 0$$

$$f_{xx} = 18x^2 = 18 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^2 = 18 \cdot \frac{100}{9} = 200 > 0$$

$$D\left(-\frac{10}{3}, -5\right) = 18 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) \cdot \left(8 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) - 16\right) - 0 = -\frac{180}{3} \cdot \left(\frac{-180-48}{3}\right) = -60 \cdot (-76) = 4560 > 0$$

$$f_{xx} = 18x = 18 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) = -\frac{180}{3} = -60 < 0$$

Analyse der Determinanten nach den Sätzen ganz oben:

$$D(2,-9) < 0 \rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$D(2,-1) < 0 \rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

$$D\left(+\frac{10}{3}, -5\right) > 0 \rightarrow \text{Extremum, } f_{xx} > 0 \rightarrow \text{relatives Minimum}$$

$$D\left(-\frac{10}{3}, -5\right) > 0 \rightarrow \text{Extremum, } f_{xx} < 0 \rightarrow \text{relatives Maximum}$$