1. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung

Gernot Salzer, Marion Scholz

10. April 2018

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Geben Sie für die folgenden Schlussfolgerungen die zugrundeliegende Inferenzregel an und stellen Sie fest, ob diese gültig ist. Wenn ja, geben Sie unter Verwendung von Alltagsbegriffen eine weitere Schlussfolgerung an, die derselben Regel folgt. Wenn nein, modifizieren Sie die Inferenzregel möglichst geringfügig, um eine gültige Regel zu erhalten, und geben Sie dann eine konkrete Schlussfolgerung mit Alltagsbegriffen an, die dieser Regel entspricht.

(a) Siehe Denkblase rechts.

(b) Alle Fische können schwimmen. Alle Spinnen können nicht schwimmen. Keine Spinne ist ein Fisch.

(c) Bruce Willis hat keinen Oscar gewonnen. Alle guten Schauspieler gewinnen einen Oscar. Bruce Willis ist kein guter Schauspieler.

Lösung

(a) Alle Katzen haben vier Beine.
Ich habe vier Beine.
———
Daher bin ich eine Katze.

Inferenzregel: Alle x haben y.
z hat y.
———
z ist ein x.

Diese Inferenzregel ist **nicht gültig**. Vertauscht man die zweite Prämisse mit der Konklusion, erhält man eine gültige Inferenzregel:

Alle x haben y.
z ist ein x.
———
z hat y.

Ein Beispiel, dem diese Inferenzregel zugrunde liegt:

$$\begin{array}{l} \text{Alle Kinder haben Träume.} \\ \text{Ich bin ein Kind.} \\ \hline \text{Ich habe Träume.} \end{array}$$

(b) $\begin{array}{l} \text{Alle Fische können schwimmen.} \\ \text{Alle Spinnen können nicht schwimmen.} \\ \hline \text{Keine Spinne ist ein Fisch.} \end{array}$ Inferenzregel: $\begin{array}{l} \text{Alle } x \text{ können } y. \\ \text{Alle } z \text{ können nicht } y. \\ \hline \text{Kein } z \text{ ist ein } x. \end{array}$

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

$$\begin{array}{l} \text{Alle Boote können schwimmen.} \\ \text{Häuser können nicht schwimmen.} \\ \hline \text{Kein Haus ist ein Boot.} \end{array}$$

(c) $\begin{array}{l} \text{Bruce Willis hat keinen Oscar gewonnen.} \\ \text{Alle guten Schauspieler gewinnen einen Oscar.} \\ \hline \text{Bruce Willis ist kein guter Schauspieler.} \end{array}$ Inferenzregel: $\begin{array}{l} x \text{ hat nicht } y. \\ \text{Alle } z \text{ haben } y. \\ \hline x \text{ ist kein } z. \end{array}$

Diese Inferenzregel ist **gültig**. Andere Schlussfolgerung mit derselben Inferenzregel:

$$\begin{array}{l} \text{Schlangen haben keine Beine.} \\ \text{Alle Säugetiere haben Beine.} \\ \hline \text{Die Schlange ist kein Säugetier.} \end{array}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Analysieren Sie die folgenden Text und identifizieren Sie die logische Struktur sowie die Elementaraussagen. Betrachten Sie dabei jeden Satz einzeln.
Dies ist ein Rezept für ein schnelles Gericht. Man nehme zwei Eier und etwas Zucker. Sobald man die Eier getrennt hat, vermischt man den Dotter mit dem Zucker und schlägt das Eiweiß zu Eischnee. Eiklar und Dotter dürfen nie gemeinsam in die Schüssel gegeben werden. Denn nur wenn das Eiweiß keinen Dotter enthält, kann es steif geschlagen werden. Gelingt dies nicht, muss man entweder neue Eier nehmen oder den Kochversuch abbrechen. Ist der Eischnee fertig, so wird er mit der Zucker-Dotter-Masse vermischt, die Masse wird anschließend in kleine Förmchen gefüllt und bei 180 Grad im Backrohr gebacken. Guten Appetit![1]

Lösung

Vorbemerkung: Manche der Aussagen enthalten eine zeitliche Komponente, die sich in der klassischen Aussagenlogik nicht adäquat ausdrücken lässt. Dafür müsste man eine Zeitlogik verwenden, mit der man zum Beispiel spezifizieren kann, dass im nächsten Zeitpunkt (oder irgendwann in der Zukunft) etwas gilt bzw. getan werden muss, wenn derzeit etwas gilt bzw. getan wird.

[1] Nachkochen nicht empfehlenswert.

(a) *Dies ist ein Rezept für ein schnelles Gericht.*
A ... Dies ist ein Rezept für ein schnelles Gericht.
Struktur: A
Formel: A

Alternativ:
A ... Dies ist ein Rezept.
B ... Es handelt sich um ein schnelles Gericht.
Struktur: A und B
Formel: $A \wedge B$

(b) *Man nehme zwei Eier und etwas Zucker.*
A ... Man nehme zwei Eier.
B ... Man nehme etwas Zucker.
Struktur: A und B
Formel: $A \wedge B$

(c) *Sobald man die Eier getrennt hat, vermischt man den Dotter mit dem Zucker und schlägt das Eiweiß zu Eischnee.*
A ... Die Eier werden getrennt.
B ... Man vermischt den Dotter mit dem Zucker.
C ... Man schlägt das Eiweiß zu Eischnee.
Struktur: Wenn A dann B und C
Formel: $A \supset (B \wedge C)$

(d) *Eiklar und Dotter dürfen nie gemeinsam in die Schüssel gegeben werden.*
A ... Eiklar wird in die Schüssel gegeben.
B ... Dotter wird in die Schüssel gegeben.
Struktur: A nicht gleichzeitig mit B
Formel: $\neg(A \wedge B)$ oder $A \uparrow B$

(e) *Denn nur wenn das Eiweiß keinen Dotter enthält, kann es steif geschlagen werden.*
A ... Das Eiweiß enthält Dotter.
B ... Das Eiweiß kann steif geschlagen werden.
Struktur: Nur wenn nicht A dann B
Formel: $\neg A \subset B$

(f) *Gelingt dies nicht, muss man entweder neue Eier nehmen oder den Kochversuch abbrechen.*
A ... Es gelingt.
B ... Man muss neue Eier nehmen.
C ... Man muss den Kochversuch abbrechen.
Struktur: Wenn nicht A dann entweder B oder C.
Formel: $\neg A \supset (B \not\equiv C)$

(g) *Ist der Eischnee fertig, so wird er mit der Zucker-Dotter-Masse vermischt, die Masse wird anschließend in kleine Förmchen gefüllt und bei 180 Grad im Backrohr geba-*

cken.
A ... Der Eischnee ist fertig.
B ... Der Eischnee wird mit der Zucker-Dotter-Masse vermischt.
C ... Die Masse wird in kleine Förmchen gefüllt.
D ... Die Masse wird bei 180 Grad im Backrohr gebacken.
Struktur: Wenn A dann B, wenn B dann C und wenn C dann D
Formel: $(A \supset B) \wedge (B \supset C) \wedge (C \supset D)$

Die klassische Aussagenlogik kann nur kausale Zusammenhänge definieren, nicht aber die zeitliche Abfolge ausdrücken. Die Formel ist z.B. auch erfüllt, wenn A, B und C falsch sind, aber D wahr. Will man erzwingen, dass die Wahrheit von D auch jene von C erfordert usw., dann müsste man Äquivalenzen statt der Implikationen verwenden.
$(A \equiv B) \wedge (B \equiv C) \wedge (C \equiv D)$
Dann besitzen alle vier Variablen immer denselben Wert, was überhaupt keine Abfolge mehr erkennen lässt.

Die Moral der Geschichte: Zeitliche Zusammenhänge erfordern Zeitoperatoren, wie sie in Zeitlogiken (Temporallogiken) existieren, nicht aber in der klassischen Aussagenlogik.

(h) *Guten Appetit!*
Hierbei handelt es sich um keine Aussage, da „Guten Appetit!" weder wahr noch falsch sein kann.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Anna, Bruno und Conny haben Einladungen zu einer Party bekommen. Wie können die folgenden Sätze formalisiert werden?

(a) Anna geht als einzige zur Party.

(b) Anna und Bruno gehen nicht zur Party.

(c) Conny geht zur Party, oder auch nicht.

(d) Anna und Bruno gehen nicht gemeinsam zur Party.

(e) Mindestens einer der drei geht zur Party.

(f) Mindestens zwei der drei gehen zur Party.

(g) Zwei der drei gehen zur Party und der/die Dritte nicht.

(h) Höchstens einer der drei geht zur Party.

(i) Höchstens zwei der drei gehen zur Party.

(j) Bruno geht nur dann zur Party, wenn Anna geht.

(k) Wenn Anna zur Party geht und Bruno nicht, dann geht Conny zur Party.

Lösung

A ... Anna geht zur Party.
B ... Bruno geht zur Party.
C ... Conny geht zur Party.

(a) $A \wedge \neg B \wedge \neg C$

(b) $\neg A \wedge \neg B$

(c) $C \not\equiv \neg C$ oder $C \vee \neg C$ oder $\top$ (Konstante true, da diese Aussage keine Einschränkung definiert.

(d) $\neg(A \wedge B)$ oder $A \uparrow B$

(e) $A \vee B \vee C$

(f) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$

(g) $(A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)$

(h) $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (\neg B \wedge \neg C)$

(i) $\neg(A \wedge B \wedge C)$ oder $\neg A \vee \neg B \vee \neg C$

(j) $B \supset A$

(k) $(A \wedge \neg B) \supset C$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Sei F die Formel $(((A \vee B) \wedge (A \supset (C \wedge B))) \wedge (B \supset (\neg C \wedge A)))$.

(a) Zeigen Sie, dass F syntaktisch korrekt ist.

(b) Berechnen Sie schrittweise $\mathsf{val}_I(F)$ für $I(A) = 0$, $I(B) = 1$ und $I(C) = 1$.

(c) Verwenden Sie eine Wahrheitstafel um festzustellen, ob die Formel F gültig, erfüllbar, widerlegbar und/oder unerfüllbar ist.

Lösung

(a) Laut Vorlesung ist die Menge $\mathcal{A}$ der aussagenlogischen Formeln die kleinste Menge, für die gilt:

(a1) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}$

(a2) $\{\top, \bot\} \subseteq \mathcal{A}$

(a3) $\neg F \in \mathcal{A}$, wenn $F \in \mathcal{A}$.

(a4) $(F * G) \in \mathcal{A}$, wenn $F, G \in \mathcal{A}$ und $* \in \{\wedge, \uparrow, \vee, \downarrow, \equiv, \not\equiv, \supset, \subset\}$.

wobei $\mathcal{V} = \{A, B, C, \dots\}$ die Menge der aussagenlogischen Variablen ist.

Wir zeigen, dass $(((A \vee B) \wedge (A \supset (C \wedge B))) \wedge (B \supset (\neg C \wedge A)))$ eine aussagenlogische Formel gemäß dieser Definition ist.

(1) Die Variablen A, B und C sind Formeln (a1).

(2) Da A und B Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(A \vee B)$ eine Formel (a4).

(3) Da C und B Formeln sind (Punkt 1), ist auch $(C \wedge B)$ eine Formel (a4).

(4) Da A und $(C \wedge B)$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 3), ist auch $(A \supset (C \wedge B))$ eine Formel (a4).

(5) Da $(A \vee B)$ und $(A \supset (C \wedge B))$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 4), ist auch $((A \vee B) \wedge (A \supset (C \wedge B)))$ eine Formel (a4).

(6) Da C eine Formel ist (Punkt 1), ist auch $\neg C$ eine Formel (a3).

(7) Da $\neg C$ und A Formeln sind (Punkt 6 bzw. 1), ist auch $(\neg C \wedge A)$ eine Formel (a4).

(8) Da B und $(\neg C \wedge A)$ Formeln sind (Punkt 1 bzw. 7), ist auch $(B \supset (\neg C \wedge A))$ eine Formel (a4).

(9) Da $((A \vee B) \wedge (A \supset (C \wedge B)))$ und $(B \supset (\neg C \wedge A))$ Formeln sind (Punkt 5 bzw. 8), ist auch $(((A \vee B) \wedge (A \supset (C \wedge B))) \wedge (B \supset (\neg C \wedge A)))$ eine Formel (a4).

Dieselbe Argumentation in Form eines Baumes:

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,a1}{(A \vee B) \in \mathcal{A}}\,a4
    \quad
    \dfrac{\dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{\dfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,a1 \quad \dfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,a1}{(C \wedge B) \in \mathcal{A}}\,a4}{(A \supset (C \wedge B)) \in \mathcal{A}}\,a4
  }{((A \vee B) \wedge (A \supset (C \wedge B))) \in \mathcal{A}}\,a4
  \quad
  \dfrac{
    \dfrac{B \in \mathcal{V}}{B \in \mathcal{A}}\,a1
    \quad
    \dfrac{\dfrac{\dfrac{C \in \mathcal{V}}{C \in \mathcal{A}}\,a1}{\neg C}\,a3 \quad \dfrac{A \in \mathcal{V}}{A \in \mathcal{A}}\,a1}{(\neg C \wedge A) \in \mathcal{A}}\,a4
  }{(B \supset (\neg C \wedge A)) \in \mathcal{A}}\,a4
}{(((A \vee B) \wedge (A \supset (C \wedge B))) \wedge (B \supset (\neg C \wedge A))) \in \mathcal{A}}\,a4
$$

Die horizontalen Linien sind als wenn-dann zu lesen, wobei die Prämissen des Schlusses oberhalb und die Konklusion unterhalb der Linie angegeben werden. Neben dem Strich steht die angewendete Regel.

(b) $\mathsf{val}_I\,(((A \vee B) \wedge (A \supset (C \wedge B))) \wedge (B \supset (\neg C \wedge A)))$
$= \mathsf{val}_I\,((A \vee B) \wedge (A \supset (C \wedge B)))$ and $\mathsf{val}_I\,(B \supset (\neg C \wedge A))$
$= \mathsf{val}_I(A \vee B)$ and $\mathsf{val}_I(A \supset (C \wedge B))$ and $\mathsf{val}_I(B \supset (\neg C \wedge A))$
$= (\mathsf{val}_I(A)\ \mathsf{or}\ \mathsf{val}_I(B))\ \mathsf{and}\ (\mathsf{val}_I(A)\ \mathsf{implies}\ \mathsf{val}_I(C \wedge B))\ \mathsf{and}\ (\mathsf{val}_I(B)\ \mathsf{implies}\ \mathsf{val}_I(\neg C \wedge A))$
$= (\mathsf{0}\ \mathsf{or}\ \mathsf{1})\ \mathsf{and}\ (\mathsf{0}\ \mathsf{implies}\ (\mathsf{val}_I(C)\ \mathsf{and}\ \mathsf{val}_I(B)))\ \mathsf{and}\ (\mathsf{1}\ \mathsf{implies}\ (\mathsf{val}_I(\neg C)\ \mathsf{and}\ \mathsf{val}_I(A)))$
$= \mathsf{1}\ \mathsf{and}\ \mathsf{1}\ \mathsf{and}\ (\mathsf{1}\ \mathsf{implies}\ (\mathsf{not}\ \mathsf{val}_I(C)\ \mathsf{and}\ \mathsf{0}))$
$= \mathsf{1}\ \mathsf{and}\ \mathsf{1}\ \mathsf{and}\ (\mathsf{1}\ \mathsf{implies}\ \mathsf{0})$
$= \mathsf{1}\ \mathsf{and}\ \mathsf{1}\ \mathsf{and}\ \mathsf{0}$
$= \mathsf{0}$

(c) Wir berechnen den Wert der Formel für alle Interpretationen mittels einer Wahrheitstafel. An dieser lassen sich dann die Eigenschaften der Formel ablesen.

A	B	C	$((A \vee B) \wedge (A \supset (C \wedge B)) \wedge (B \supset (\neg C \wedge A))$
0	0	0	0 0 1 0 **0** 1 1 0
0	0	1	0 0 1 0 **0** 1 0 0
0	1	0	1 1 1 0 **0** 0 1 0
0	1	1	1 1 1 1 **0** 0 0 0
1	0	0	1 0 0 0 **0** 1 1 1
1	0	1	1 0 0 0 **0** 1 0 0
1	1	0	1 0 0 0 **0** 1 1 1
1	1	1	1 1 1 1 **0** 0 0 0

Die Formel ist somit unerfüllbar und widerlegbar, aber weder gültig noch erfüllbar.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Formeln

$$((B \equiv A) \wedge (\neg A \supset B)) \quad \text{und} \quad (A \wedge B)$$

äquivalent sind, und zwar

(a) mit Hilfe einer Wahrheitstafel.

(b) durch algebraische Umformungen.

Lösung

(a) Wahrheitstafel:

A	B	$((B \equiv A) \wedge (\neg A \supset B)) = (A \wedge B)$
0	0	1 **0** 1 0 ✓ **0**
0	1	0 **0** 1 1 ✓ **0**
1	0	0 **0** 0 1 ✓ **0**
1	1	1 **1** 0 1 ✓ **1**

Da beide Formeln in sämtlichen Wahrheitsbelegungen denselben Wert liefern, sind sie äquivalent.

(b) Wir vereinfachen die erste Formel. Da wir dabei die zweite Formel erhalten, sind die ursprünglichen Formeln äquivalent.

$$
\begin{aligned}
&(B \equiv A) \wedge (\neg A \supset B) && F \equiv G = (\neg F \vee G) \wedge (F \vee \neg G)\\
&= ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \wedge (\neg A \supset B) && F \supset G = \neg F \vee G\\
&= ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \wedge (\neg\neg A \vee B) && \neg\neg F = F\\
&= ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)) \wedge (A \vee B) && F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H)\\
&= ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee (\neg B \wedge B)) && F \wedge \neg F = \bot\\
&= ((\neg A \vee B) \wedge (A \vee \bot) && F \vee \bot = F\\
&= ((\neg A \vee B) \wedge A && F \wedge (G \vee H) = (F \wedge G) \vee (F \wedge H)\\
&= (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge A) && F \wedge \neg F = \bot\\
&= \bot \vee (B \wedge A) && F \vee \bot = F\\
&= B \wedge A && F \wedge G = G \wedge F\\
&= A \wedge B
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Gegeben sei folgender Sachverhalt:
Der Ball ist rot oder gelb. Wenn der Ball rot ist, dann ist er gelb oder nicht blau. Wenn der Ball nicht blau ist, dann ist er nicht rot.
Kann man aus diesen Argumenten schließen, dass der Ball nicht blau ist? Wie sieht die Formel aus, deren Gültigkeit/Nichtgültigkeit zeigen würde, dass die Konsequenzbeziehung gilt/nicht gilt?

Lösung

Formalisierung:
R ... Der Ball ist rot.
B ... Der Ball ist blau.
G ... Der Ball ist gelb.

- $R \vee G$ ... Der Ball ist rot oder gelb.
- $R \supset (G \vee \neg B)$ ... Wenn der Ball rot ist, dann ist er gelb oder nicht blau.
- $\neg B \supset \neg R$ ... Wenn der Ball nicht blau ist, dann ist er nicht rot.

$I(R)$	$I(B)$	$I(G)$	$R \vee G$,	$R \supset (G \vee \neg B)$,	$\neg B \supset \neg R$	$\models_I$	$\neg B$
0	0	0	0	1	1	✓	1
0	0	1	1	1	1	✓	1
0	1	0	0	1	1	✓	0
0	1	1	1	1	1	$\lightning$	0
1	0	0	1	1	0	✓	1
1	0	1	1	1	0	✓	1
1	1	0	1	0	1	✓	0
1	1	1	1	1	1	$\lightning$	0

Nein, man kann aus den gegebenen Argumenten nicht schließen, dass der Ball nicht blau ist. Oder anders formuliert: Die Formel $\neg B$ ist keine logische Konsequenz der Prämissen $R \vee G$, $R \supset (G \vee \neg B)$ und $\neg B \supset \neg R$.

Arbeitsvereinfachung: Ist in einer Interpretation eine der Prämissen falsch oder die Konklusion wahr, müssen die übrigen Formeln nicht mehr ausgewertet werden, da die Beziehung $\models_I$ dann bereits erfüllt ist. Umgekehrt kann man die Erstellung der Tabelle abbrechen, sobald man eine Interpretation I findet, für die $\models_I$ nicht gilt.
Beginnt man in dieser Aufgabe die Auswertung mit der Konklusion, müssen wir den Wert der Prämissen nur für die Interpretationen bestimmen, bei denen $\neg B$ den Wert 0 besitzt. Weiters kann man mit dem Auswerten der Prämissen in einer Zeile aufhören, sobald eine Prämisse den Wert 0 besitzt.

$I(R)$	$I(B)$	$I(G)$	$R \vee G,$	$R \supset (G \vee \neg B),$	$\neg B \supset \neg R$	$\models_I$	$\neg B$
0	0	0				✓	1
0	0	1				✓	1
0	1	0	0			✓	0
0	1	1	1	1	1	↯	0
1	0	0				✓	1
1	0	1				✓	1
1	1	0					0
1	1	1					0

Formel zur Konsequenzbeziehung: $\neg B$ ist genau dann eine logische Konsequenz der Formeln $R \vee G$, $R \supset (G \vee \neg B)$ und $\neg B \supset \neg R$, wenn die Formel

$$((R \vee G) \wedge (R \supset (G \vee \neg B)) \wedge (\neg B \supset \neg R)) \supset \neg B$$

gültig ist.
Alternative Lösung: Nimmt man implizit an, dass der Ball nur einfärbig ist, muss man die weitere Prämisse

$$(R \wedge \neg B \wedge \neg G) \vee (\neg R \wedge B \wedge \neg G) \vee (\neg R \wedge \neg B \wedge G)$$

hinzunehmen. Diese ist nur in drei Interpretationen erfüllt, für die Relation $\models_I$ gilt. In dieser Lösung ist die Formel $\neg B$ eine logische Konsequenz der Prämissen.

Aufgabe 7 **(2 Punkte)**

Sei f folgende dreistellige Funktion.

x	y	z	$f(x,y,z)$	x	y	z	$f(x,y,z)$
1	1	1	1	0	1	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1

Stellen Sie f durch eine Formel in

(a) disjunktiver

(b) konjunktiver

Normalform dar.

Lösung

(a) $(A_1 \wedge A_2 \wedge A_3) \vee (A_1 \wedge A_2 \wedge \neg A_3) \vee (\neg A_1 \wedge \neg A_2 \wedge \neg A_3)$

(b) $(\neg A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3) \wedge (\neg A_1 \vee A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee \neg A_3) \wedge (A_1 \vee \neg A_2 \vee A_3) \wedge (A_1 \vee A_2 \vee \neg A_3)$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Sei F die Formel $A \wedge (B \uparrow C) \wedge ((\neg A \vee C) \supset B)$.

(a) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in disjunktiver Normalform. Verwenden Sie die semantische Methode.

(b) Bestimmen Sie eine zu F äquivalente Formel in konjunktiver Normalform. Verwenden Sie die algebraische Methode.

Lösung

(a) Wir erstellen zuerst die Wahrheitstafel. Da die Formel auf oberster Ebene aus Konjunktionen besteht, ergibt sich für die ersten vier Interpretationen der Wert 0, da A den Wert 0 besitzt. In den verbleibenden Interpretationen ist die Formel $B \uparrow C$ nur in drei Fällen wahr. Für diese müssen wir die letzte Formel der Konjunktion auswerten.

A	B	C	$A \wedge (B \uparrow C) \wedge ((\neg A \vee C) \supset B)$			
0	0	0	0	**0**		
0	0	1	0	**0**		
0	1	0	0	**0**		
0	1	1	0	**0**		
1	0	0	1	**1**	1	1
1	0	1	1	**0**	1	0
1	1	0	1	**1**	1	1
1	1	1	1	**0**	0	

Aus dieser Tafel lässt sich folgende DNF ablesen:

$$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C)$$

Diese DNF lässt sich zu $A \wedge \neg C$ vereinfachen, da die beiden Teilformeln bis auf das Literal für B identisch sind.

(b) KNF mittels algebraischer Methode:

$$
\begin{aligned}
& A \wedge (B \uparrow C) \wedge ((\neg A \vee C) \supset B) && (F \uparrow G) = \neg F \vee \neg G \\
&= A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge ((\neg A \vee C) \supset B) && F \supset G = \neg F \vee G \\
&= A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg(\neg A \vee C) \vee B) && \neg(F \vee G) = \neg F \wedge \neg G \\
&= A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge ((\neg\neg A \wedge \neg C) \vee B) && \neg\neg F = F \\
&= A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge ((A \wedge \neg C) \vee B) && F \vee (G \wedge H) = (F \vee G) \wedge (F \vee H) \\
&= A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (A \vee B) \wedge (\neg C \vee B) && F \wedge G = G \wedge F,\ F \wedge (F \vee G) = F \\
&= A \wedge (\neg B \vee \neg C) \wedge (\neg C \vee B) && (F \wedge G) \vee H = (F \vee H) \wedge (G \vee H) \\
&= A \wedge (\neg C \vee (\neg B \wedge B)) && F \wedge \neg F = \bot \\
&= A \wedge (\neg C \vee \bot) && F \vee \bot = F \\
&= A \wedge \neg C
\end{aligned}
$$

Das Ziel, eine KNF zu erhalten, ist bereits in der sechsten Zeile erreicht. Die weiteren Umformungen dienen nur noch der Vereinfachung.

Aufgabe 9 **(4 Punkte)**

Ein kleiner Kobold versteckt am Ende eines Regenbogens einen Topf mit Gold. Doch als er am nächsten Tag zurückkehrt um den Topf zu holen, stehen dort drei verschlossene Töpfe. Sein Bruder hat sich einen gemeinen Scherz erlaubt und hat zum Topf mit Gold zwei leere Töpfe dazu gestellt. Jeder Topf hat eine Inschrift:

- Auf Topf A steht: „Hier ist nicht das Gold.“
- Auf Topf B steht: „Hier ist nicht das Gold.“
- Auf Topf C steht: „Das Gold ist in Topf B.“

Nur eine der Inschriften ist wahr, die anderen beiden sind falsch. Weiters darf der kleine Kobold nur einen Topf öffnen. Findet er heraus, welcher der Topf mit dem Gold ist? Falls ja, welcher ist es? Helfen Sie dem Kobold, indem Sie die Hinweise mit Hilfe der Aussagenlogik formalisieren und die Formeln geeignet auswerten.

Lösung

Wir benennen folgende Aussagenvariablen:

A ... Das Gold ist in Topf A.
B ... Das Gold ist in Topf B.
C ... Das Gold ist in Topf C.

Nun formalisieren wir die vorhandenen Informationen:

- Das Gold ist in einem der Töpfe, die anderen sind leer.
  $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$

- Die drei Inschriften sind $lnot A$, $\neg B$ bzw. B. Nur eine der Inschriften ist wahr, die anderen beiden sind falsch.

$$\begin{aligned}
&(\neg\neg A \wedge \neg\neg B \wedge B) \vee (\neg\neg A \wedge \neg B \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \neg\neg B \wedge \neg B) && \scriptstyle \neg\neg F = F \\
&= (A \wedge B \wedge B) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg B) && \scriptstyle F \wedge F = F \\
&= (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg B) && \scriptstyle F \wedge \neg F = \bot \\
&= (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge \bot) && \scriptstyle F \wedge \bot = \bot \\
&= (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B) \vee \bot && \scriptstyle F \vee \bot = F \\
&= (A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)
\end{aligned}$$

Wir suchen nun alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen A, B und C, sodass die Formeln $(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$ und $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$ wahr werden. Die erste Formel ist offenbar nur dann erfüllt, wenn genau eine der Aussagen A, B und C wahr ist, es genügt also, drei Wahrheitsbelegungen zu untersuchen.

A	B	C	$(A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B)$	
0	0	1	1	0	
0	1	0	1	0	
1	0	0	1	1	✓

Das Gold ist somit in Topf A.

Aufgabe 10 **(4 Punkte)**

Im Kindergarten Kunterbunt gibt es ein Meerschweinchen, um das sich jede Woche drei Kinder kümmern. Im Sommer sind aber viele Kinder auf Urlaub, und in der letzten Juli-Woche sind überhaupt nur noch 6 Kinder im Kindergarten. Daher beraten die Pädagoginnen, welche drei Kinder sie auswählen. Sie stellen folgende Überlegungen an.

> *Max und Paul vertragen sich nicht besonders gut; einen der beiden Buben sollten wir auf jeden Fall nehmen, auf keinen Fall aber beide. Wenn wir Elisa nicht nehmen, dann will Anna sicher auch nicht. Flora und Anna sind sehr tierlieb, wir sollten zumindest eine der beiden auswählen. Wenn wir Elisa nehmen, dann auf jeden Fall auch Paul, die zwei machen alles gemeinsam. Luca zu nehmen ist keine gute Idee, er ist gerade mitten in einer Experimentierphase, die das Meerschweinchen womöglich nicht überstehen würde.*

(a) Drücken Sie diese Überlegungen mit allen Anhaltspunkte durch aussagenlogische Formeln aus; berücksichtigen Sie auch die Bedingungen in der Einleitung. Geben Sie die Bedeutung der von Ihnen verwendeten Aussagenvariablen an.

(b) Zu welchem Ergebnis kommen die Pädagoginnen? Welche Varianten sind möglich? Begründen Sie die Antwort mit Hilfe Ihrer aussagenlogischen Modellierung.

Lösung

(a) Aussagenvariablen und ihre Bedeutung:
$P/E/F/A/L/M$ ... Die Pädagoginnen wählen Paul/Elisa/Flora/Anna/Luca/Max.

Aussagenlogische Formeln:

$$\begin{aligned}
F_0 := {} & (P \wedge E \wedge F \wedge \neg A \wedge \neg M) \vee (P \wedge E \wedge \neg F \wedge A \wedge \neg M) \vee \\
& (P \wedge E \wedge \neg F \wedge \neg A \wedge M) \vee (P \wedge \neg E \wedge F \wedge A \wedge \neg M) \vee \\
& (P \wedge \neg E \wedge F \wedge \neg A \wedge M) \vee (P \wedge \neg E \wedge \neg F \wedge A \wedge M) \vee \\
& (\neg P \wedge E \wedge F \wedge A \wedge \neg M) \vee (\neg P \wedge E \wedge F \wedge \neg A \wedge M) \vee \\
& (\neg P \wedge E \wedge \neg F \wedge A \wedge M) \vee (\neg P \wedge \neg E \wedge F \wedge A \wedge M)
\end{aligned}$$

	Genau drei Kinder (ohne Luca)
$F_2 := M \not\equiv P$	genau ein Bub
$F_3 := \neg E \supset \neg A$	wenn nicht Elisa dann nicht Anna
$F_4 := F \vee A$	Flora oder Anna oder beide
$F_5 := E \supset P$	wenn Elisa dann Paul
$F_6 := \neg L$	Luca auf keinen Fall

(b) Wir suchen alle Wahrheitsbelegungen für die Variablen P, E, F, A, L und M, sodass die Formeln $F_0, \ldots, F_6$ wahr werden. Wegen der Formel F_0 genügt es Belegungen zu betrachten, in denen genau drei Variablen wahr sind; wegen Formel F_6 interessieren nur Belegungen, in denen L falsch ist. Weiters müssen wir die weiteren Formeln nicht mehr auswerten, sobald eine Formel in der Variablenbelegung falsch ist.

L	P	E	F	A	M	F_0	$M \not\equiv P$	$\neg E \supset \neg A$	$F \vee A$	$E \supset P$	$\neg L$	
0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	✓
0	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	✓
0	1	1	0	0	1	1	0					
0	1	0	1	1	0	1	1	0				
0	1	0	1	0	1	1	0					
0	1	0	0	1	1	1	0					
0	0	1	1	1	0	1	0					
0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0		
0	0	1	0	1	1	1	1	1	1	0		
0	0	0	1	1	1	1	1	0				

Die Pädagoginnen wählen auf jeden Fall Paul und Elisa aus, zusätzlich noch Flora oder Anna.