Beispiel 111

$$f(x,y,z) = xyz$$

Nebenbedingungen: $xy + yz + zx = a, \quad x+y+z = b$

Verfahren von Lagrange:

$$\Phi(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = xyz + \lambda_1(xy+yz+zx-a) + \lambda_2(x+y+z-b)$$

$$\Phi_x = yz + \lambda_1(y+z) + \lambda_2 = 0$$

$$\Phi_y = xz + \lambda_1(x+z) + \lambda_2 = 0$$

$$\Phi_z = xy + \lambda_1(x+y) + \lambda_2 = 0$$

$$\Phi_{\lambda_1} = xy + yz + zx - a = 0$$

$$\Phi_{\lambda_2} = x + y + z - b = 0$$

$$\Phi_x - \Phi_y = 0 \Rightarrow z(y-x) + \lambda_1(y-x) = 0$$

$$\Rightarrow (y-x)\cdot(z+\lambda_1) = 0 \quad \dots\dots \text{I}$$

$$\Phi_x - \Phi_z = 0 \underset{\text{analog}}{\Rightarrow} (z-x)\cdot(y+\lambda_1) = 0 \quad \dots\dots \text{II}$$

$$\Phi_y - \Phi_z = 0 \Rightarrow (z-y)\cdot(x+\lambda_1) = 0 \quad \dots\dots \text{III}$$

Falls $y \neq x$, dann folgt aus I: $\lambda_1 = -z$.
Eingesetzt in II ergibt das $(z-x)\cdot(y-z) = 0$, also

$x = z$ oder $y = z$

Analog: $z \neq x \Rightarrow \dots\dots \Rightarrow x = y$ oder $y = z$

$y \neq z \Rightarrow \dots\dots \Rightarrow x = y$ oder $x = z$

Insgesamt haben wir also:

$$\boxed{x = y \text{ oder } x = z \text{ oder } y = z}$$

Fall 1: $x=y \Rightarrow \quad \Phi_{\lambda_1} = x^2 + 2xz - a = 0$

$$\Phi_{\lambda_2} = 2x + z - b = 0 \Rightarrow \underline{\underline{z = b - 2x}}$$

$$\Rightarrow x^2 + 2x(b-2x) - a = 0$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 2bx + a = 0$$

$$\Rightarrow {}_1x_2 = \frac{2b \pm \sqrt{4b^2-12a}}{6} = \frac{b \pm \sqrt{b^2-3a}}{3} = {}_1y_2$$

$$ {}_1z_2 = \frac{b \mp 2\cdot\sqrt{b^2-3a}}{3}$$

Fall 2: $x=z \Rightarrow$ analog $\Rightarrow$

$${}_1x_2 = {}_1z_2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2-3a}}{3}, \quad {}_1y_2 = \frac{b \mp 2\cdot\sqrt{b^2-3a}}{3}$$

Fall 3: $y=z \Rightarrow$ analog $\Rightarrow$

$${}_1y_2 = {}_1z_2 = \frac{b \pm \sqrt{b^2-3a}}{3}, \quad {}_1x_2 = \frac{b \mp 2\cdot\sqrt{b^2-3a}}{3}$$