

10

Anwendungen des Drehimpulssatzes

Drehbewegungen bereiten Verständnisschwierigkeiten, nicht weil das Trägheitsmoment Tensorcharakter hat – das kann man eliminieren, indem man sich, wo immer möglich, auf Drehungen um Hauptachsen beschränkt –, sondern weil neben den etwas ungewohnten axialen Vektoren, nun auch noch Effekte auftreten, die bei translatorischen Bewegungen nicht anzutreffen sind. In diesem Kapitel sollen Rollbewegungen, einfache Stöße, die Drehbewegungen auslösen, und Kreiselbewegungen behandelt werden, die zu den faszinierendsten der ganzen Mechanik gehören. Allen angeführten Beispielen ist gemeinsam, daß die Drehungen nicht mehr um feste, durch Lager fixierte Achsen erfolgen. Die durch den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ bestimmten Drehachsen ändern ständig ihre Lagen; man hat es nur noch mit *momentanen Drehachsen* zu tun. Das Konzept der momentanen Drehachse ist bei der Lösung vieler Rotationsprobleme sehr nützlich; es soll zunächst besprochen werden.

10.1 Momentane Drehachse

Momentane Drehachsen treten schon bei einfachen Drehbewegungen auf. Betrachten Sie das Abrollen eines Zylinders mit dem Radius R auf einer Ebene (Fig. 10.1). Der Zylinder bewege sich mit konstanter Translationsgeschwindigkeit \vec{v}_0 . Gleichzeitig dreht er sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω , die durch $v_0 = \omega R$ mit der Translationsgeschwindigkeit verknüpft ist, wenn der Zylinder rollt, ohne zu rutschen. Dabei dreht er sich natürlich um seinen Mittelpunkt. Man kann jedoch Rotation und Translation zu einer einzigen Bewegungsform, dem Rollen, zusammenfassen: Der Zylinder dreht sich dann momentan um seine Auflagelinie. Der Auflagepunkt A erfüllt nämlich alle Anforderungen, die man an einen Drehpunkt stellen muß:

1. Die (Gesamt-)Bahngeschwindigkeit \vec{v} eines Massenelements des rollenden Körpers steht senkrecht auf dem Radiusvektor \vec{r} vom Momentandrehpunkt A zum Massenelement bei P .

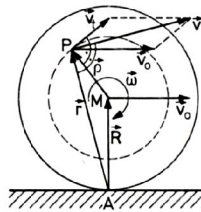


Fig. 10.1: Bei einem rollenden Zylinder kann man die Translation mit der Geschwindigkeit \vec{v}_0 und die Rotation um die Mittelpunktsachse M zu einer Rotation um die momentane Drehachse, die Auflagelinie A , zusammenfassen. Die momentane Drehachse ist nicht mehr raumfest; sie bewegt sich vielmehr mit \vec{v}_0 parallel zu sich selbst.

2. Die Bahngeschwindigkeit nimmt dem Betrage nach proportional mit der Größe des Radiusvektors zu, also gemäß $v = \omega \cdot r$. Dies läßt sich an Hand von Fig. 10.1 zeigen.

\vec{v}_0 sei die Translationsgeschwindigkeit des rollenden Körpers, $\vec{\omega}$ seine Winkelgeschwindigkeit um seine Achse (M). In der Schnitzzschie sei \vec{r} der Ortsvektor des Massenpunktes P und \vec{R} der des Mittelpunktes M bezüglich des Auflagepunktes A . Die Gesamtgeschwindigkeit \vec{v} von P setzt sich vektoriell aus der Translationsgeschwindigkeit \vec{v}_0 und der Tangentialgeschwindigkeit \vec{v}_t zusammen, die von der Rotation um M herrührt. Wenn also $\vec{\rho}$ der Radiusvektor von M nach P ist, kann man schreiben:

$$\vec{v}_t = \vec{\omega} \times \vec{\rho}; \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_t. \quad (10.1)$$

Wir berechnen das Skalarprodukt von \vec{v} mit \vec{r} :

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot \vec{r} &= (\vec{v}_0 + \vec{v}_t) \cdot (\vec{R} + \vec{\rho}) = \underbrace{\vec{v}_0 \cdot \vec{R}}_{=0} + \vec{v}_0 \cdot \vec{\rho} + \vec{v}_t \cdot \vec{R} + \underbrace{\vec{v}_t \cdot \vec{\rho}}_{=0} \\ &= \vec{v}_0 \cdot \vec{\rho} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot \vec{R} = (\vec{\omega} \times \vec{R}) \cdot \vec{\rho} + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \cdot \vec{R} = 0. \end{aligned} \quad (10.2)$$

Im letzten Rechenschritt wurde die zyklische Vertauschbarkeit der Faktoren im Spatprodukt und die aus Fig. 10.1 entnehmbare Beziehung $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}$ ausgenutzt. Ergebnis also: $\vec{v} \cdot \vec{r} = 0$; \vec{v} steht senkrecht auf \vec{r} . Das beweist die obige Behauptung (1).

Desweiteren kann man die Gesamtgeschwindigkeit \vec{v} des Massenelements bei P als Summe von Translations- und Tangentialgeschwindigkeit schreiben:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_t = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times (\vec{r} - \vec{R}) = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r} - \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{R}}_{= \vec{v}_0}.$$

Also verbleibt:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (10.3)$$

Das heißt aber, daß v und r einander proportional sind – genau wie bei einer Drehung um eine feste Achse oder einen festen Drehpunkt. Das beweist den zweiten Teil der obigen Behauptung.

Translation und Rotation sind damit zu einer Rotation um die momentane Drehachse, die ständig ihre Lage ändert, zusammenfaßbar. Das schlägt sich auch in der kinetischen Energie nieder. Man kann die kinetische Energie der Translation und die der Rotation zur kinetischen Energie der Rollbewegung aufaddieren und diese wie eine Rotationsenergie aufschreiben, indem man das Trägheitsmoment bezüglich der momentanen Drehachse einsetzt:

$$E_k = E_k^{tr} + E_k^{rot} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_M\omega^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 + \frac{1}{2}J_M\omega^2 = \frac{1}{2}J_A\omega^2, \quad (10.4)$$

denn nach dem Steinerschen Satz ist $J_A = J_M + mR^2$.

Hatte man es bei einem rollenden Zylinder mit der Überlagerung einer Translations- und einer Rotationsbewegung zu tun, wobei sich die momentane Drehachse ständig parallel zu sich selbst verschob, so hat man bei einem auf der Mantelfläche rollenden Kegel eine Überlagerung zweier

Rotationsbewegungen vorliegen:

1. eine Rotation ($\vec{\omega}$) um die z -Achse durch die Kegelspitze und
2. eine Rotation ($\vec{\omega}'$) um die Figurenaxe des Kegels.

Die Überlagerung der beiden Drehungen wird durch den resultierenden Winkelgeschwindigkeitsvektor

$$\vec{\omega}_M = \vec{\omega}' + \vec{\omega} \quad (10.5)$$

beschrieben, der durch die Mantellinie (Auflagelinie) des Kegels verläuft und die momentane Drehachse repräsentiert. Diesmal dreht sich die momentane Drehachse in der x, y -Ebene (Fig. 10.2).

Die kinetische Energie der Gesamtbewegung erhält man auch jetzt wieder einfach durch

$$E_k^{ges} = \frac{1}{2} J_M \omega_M^2, \quad (10.6)$$

wobei J_M diesmal das Trägheitsmoment des Kegels bezüglich seiner Mantellinie als Drehachse darstellt. Dieses Trägheitsmoment kann man berechnen; der Ausdruck dafür ist aber etwas länglich und hier nicht weiter von Interesse.

10.2 Beispiele

10.2.1 Kugel oder Zylinder auf einer schiefen Ebene

Das Beispiel einer Kugel, die, ohne zu gleiten, eine schiefe Ebene mit dem Neigungswinkel θ hinabrollt, haben wir bei der Neuformulierung des Energiesatzes im Kap. 8 schon einmal kurz angesprochen. Aus dem dort aufgeschriebenen Energieerhaltungssatz läßt sich die Bahngeschwindigkeit v oder die Winkelgeschwindigkeit ω ausrechnen, wenn die Kugel z. B. aus der Ruhe heraus startet. Aus

$$mgH = mgh + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_M\omega^2$$

folgt

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{J_M}{r^2} + m \right) \cdot v^2 = mg(H - h) = mgs \cdot \sin \theta. \quad (10.7)$$

Hier wurde die Höhendifferenz $(H - h)$ durch den auf der schiefen Bahn zurückgelegten Weg s und die Winkelgeschwindigkeit ω durch die Bahngeschwindigkeit $v = \omega r$ ersetzt. Die Differentiation nach der Zeit liefert die Beschleunigung $a = dv/dt$.

$$v \cdot \frac{dv}{dt} \cdot \left(\frac{J_M}{r^2} + m \right) = mg \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \sin \theta,$$

$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + J_M/mr^2}. \quad (10.8)$$

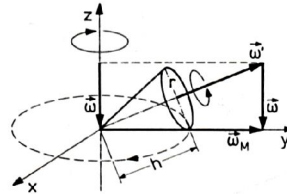


Fig. 10.2: Ein auf seiner Mantelfläche rollender Kreiskegel rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}'$ um seine Figurenaxe und gleichzeitig um die zur Auflagefläche senkrechte Achse z mit $\vec{\omega}$. Beide Drehbewegungen lassen sich zu einer einzigen zusammenfassen: eine Drehung ($\vec{\omega}_M$) um die Auflagelinie als momentane Drehachse.

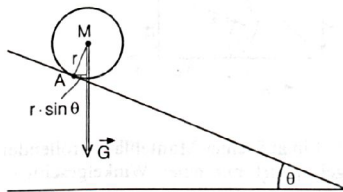


Fig. 10.3: Eine Kugel oder ein Zylinder dreht sich momentan um die Auflageachse A. Die Gewichtskraft G liefert das wirksame Drehmoment.

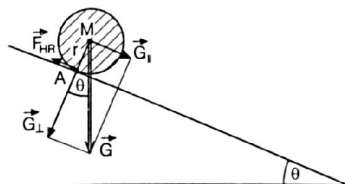


Fig. 10.4: Zerlegung der Gewichtskraft in ihre Komponenten. Das Haftreibungsdrehmoment $r \cdot F_{HR}$ ist dafür verantwortlich, daß sich die Kugel dreht. Ohne Haftreibung würde sie nur rutschen.

Hier ist nur noch das Trägheitsmoment des rollenden Körpers, also $\frac{1}{2}mr^2$ für einen Vollzylinder, $\frac{2}{5}mr^2$ für eine Kugel einzusetzen, um die Beschleunigung zu spezifizieren. Sie ist in jedem Fall konstant und kleiner als bei einem gleich schweren rutschenden Körper ($\rightarrow J_M = 0$), wie das Experiment bestätigt.

Trotzdem bleibt die Frage, ob der Energieerhaltungssatz überhaupt angewendet werden durfte, denn Reibung ist in jedem Fall mit im Spiel. Die Anwendung des Drehimpulssatzes und des Konzepts der momentanen Drehachse bieten einen weiteren Zugang zu dem Problem.

Der Körper dreht sich momentan um eine Achse durch den Auflagepunkt A (Fig. 10.3). Das wirksame Drehmoment ist $M_a = G \cdot (r \sin \theta) = mgr \sin \theta$; es hat eine Winkelbeschleunigung $\alpha = a/r$ zur Folge.

$$G \cdot r \cdot \sin \theta = J_A \cdot \alpha \quad (10.9)$$

In diesem Fall ist das zur Achse A gehörende Trägheitsmoment $J_A = J_M + mr^2$ einzusetzen. Man löst auf und findet für die Bahnbeschleunigung:

$$a = \alpha \cdot r = \frac{mgr^2 \sin \theta}{J_A} = \frac{g \sin \theta}{1 + J_M/mr^2} \quad (10.10)$$

Das ist das gleiche Ergebnis wie oben: Der Energieerhaltungssatz ist also anwendbar, wenn man es nur mit Haftreibungskräften zu tun hat ($\Delta W = F_{HR} \cdot \Delta s = 0$ wegen $\Delta s = 0$). Rollreibungsdrehmomente dagegen produzieren Wärme; sie wirken dem Gewichts-drehmoment entgegen und können in der obigen Rechnung berücksichtigt werden; sie wurden bei der Anwendung des Energieerhaltungssatzes als vernachlässigbar gering angesehen.

Ein dritter Lösungsweg, der die Haftreibungskraft F_{HR} explizit berücksichtigt, bietet einen noch tieferen Einblick in die Problematik. In Fig. 10.4 ist die Gewichtskraft in ihre Komponenten senkrecht und parallel zur Bahn zerlegt, auch die Haftreibungskraft \vec{F}_{HR} ist angegeben. Es gilt:

1. Der Impulssatz:

$$F_a = G_{\parallel} - F_{HR} = m \cdot a \quad (10.11)$$

Die effektive (äußere) Kraft \vec{F}_a ist für die Bahnbeschleunigung a verantwortlich.

2. Der Drehimpulssatz:

$$M_a = r \cdot F_{HR} = J_M \cdot \alpha \quad (10.12)$$

Das Haftreibungsdrehmoment setzt die Drehung des Körpers um seinen Mittelpunkt M in Gang und ist für die Winkelbeschleunigung α verantwortlich. Wieder gilt $a = \alpha \cdot r$. Aus beiden Gleichungen kann man die Haftreibungskraft F_{HR} eliminieren und landet wieder bei

$$a = \frac{g \sin \theta}{1 + J_M/mr^2}$$

Man kann umgekehrt aber auch die Haftreibungskraft ausrechnen, indem man a in (10.11) einsetzt.

$$F_{HR} = G_{\parallel} - ma = G_{\parallel} \cdot \frac{J_M/mr^2}{1 + J_M/mr^2}$$

$$F_{HR} = \gamma \cdot G_{\parallel} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{J_M/mr^2}{1 + J_M/mr^2}. \quad (10.13)$$

Kugel: $\gamma = 2/7$; Vollzylinder: $\gamma = 1/3$.

Man findet also

1. daß die treibende Kraft größer G_{\parallel} ist als die Haftreibungskraft, $G_{\parallel} > F_{HR}$; das ist verständlich, denn die Bewegung wird ja in Gang gesetzt;
2. daß die Haftreibungskraft vom Trägheitsmoment des Körpers abhängt und keineswegs wie etwa die Gleitreibungskraft proportional zur Normalkraft angesetzt werden kann.
3. daß die Haftreibungskraft proportional zur treibenden Kraft ist.

10.2.2 Stoßprobleme

(a) Eine auf einer waagerechten Unterlage ruhende Kugel erhält in Höhe ihres Mittelpunktes einen Stoß \vec{S}_F . Die Kugel soll rollen, nicht rutschen. Gesucht sind Bahngeschwindigkeit v und Winkelgeschwindigkeit ω .

Da die Kugel gleitfrei rollen soll, gilt $v = \omega r$; man muß nur eine der beiden Größen ausrechnen. Der Stoß setzt diese Rollbewegung in Gang, bewirkt also eine Translation *und* eine Rotation. Mit A als momentanem Drehpunkt liefert der Drehimpulssatz:

Momentenstoß = Drehimpulsänderung

$$S_M = \Delta L$$

$$r \cdot S_F = J_A \cdot \omega = (mr^2 + J_M) \cdot \omega$$

und damit

$$v = \frac{1}{1 + J_M/mr^2} \cdot \frac{S_F}{m}. \quad (10.14)$$

Diese Bahngeschwindigkeit ist kleiner als die, die man erhalten hätte, wenn die Kugel nur rutschen würde ($v_r = S_F/m$).

Dasselbe Ergebnis hätte man bei expliziter Berücksichtigung der Haftreibung erhalten. Man muß dann aufschreiben:

1. den Impulssatz für die Translationsbewegung: Der wirksame Kraftstoß hat eine Impulsänderung zur Folge.

$$S_F^{wirk} = S_F - S_F^{HR} = \Delta p = m \cdot \Delta v = m \cdot v, \quad (10.15)$$

2. den Drehimpulssatz für die Rotation (um M natürlich): Der durch den Haftreibungskraftstoß bewirkte Momentenstoß führt zu einer Drehimpulsänderung.

$$S_M^{wirk} = r \cdot S_F^{HR} = \Delta L = J_M \cdot \Delta \omega = J_M \cdot \omega. \quad (10.16)$$

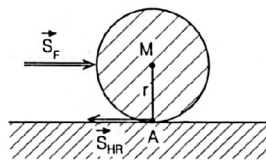


Fig. 10.5: Anstoß einer Kugel auf einer ebenen Unterlage.

Die Eliminierung des Haftreibungstoßes S_F^{HR} führt wieder auf Gl. (10.14).

In diesem Zusammenhang ist es recht interessant, auch das folgende Problem zu betrachten: Angenommen, der Stoß auf die Kugel sei so heftig, daß sie zunächst rutscht (ohne abzuheben) und erst allmählich durch die Gleitreibung auf der Unterlage in Rotation gerät. Wie groß ist dann die schließlich einstellende Bahngeschwindigkeit beim Rollen?

Gegeben ist wieder die Größe S_F des Stoßes. Es soll außerdem angenommen werden, daß die auf die Kugel einwirkende Gleitreibungskraft beim Rutschen konstant ist. Unmittelbar nach dem Stoß besitzt die Kugel die Anfangsgeschwindigkeit

$$v_0 = \frac{S_F}{m}$$

und bezüglich der Unterlage einen Bahndrehimpuls von der Größe

$$L_B^{(0)} = r \cdot mv_0.$$

Durch das Gleiten kommt die Rotation in Gang, die Translationsbewegung verlangsamt sich. Schließlich greift die Haftreibung, die Kugel rollt, es gilt wieder $v = \omega r$. Der anfängliche Bahndrehimpuls ist nun in einen Bahn- und einen Eigendrehimpuls übergegangen:

$$\begin{aligned} L_B^{(0)} &= L_B + L_E \\ r \cdot mv_0 &= r \cdot mv + J_M \cdot \omega = r \cdot mv + J_M \cdot \frac{v}{r} \\ v &= \frac{1}{1 + J_M/mr^2} \cdot v_0 = \frac{1}{1 + J_M/mr^2} \cdot \frac{S_F}{m}. \end{aligned} \quad (10.17)$$

Das ist die gleiche Bahngeschwindigkeit, die wir oben ohne das anfängliche Rutschen erhalten hatten. Jedoch: Der Energieübertrag auf die Kugel beim Stoß ist anders. Im ersten Fall, bei dem die Kugel gleich zu Beginn rollt, ohne zu gleiten, wurde ihr die Energie

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_M\omega^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + J_M/mr^2} \cdot \frac{S_F^2}{m} \quad (10.18)$$

übergeben, im zweiten Fall aber

$$E_2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \frac{S_F^2}{m} > E_1. \quad (10.19)$$

Die Differenz $E_2 - E_1$ wurde durch das Rutschen in Wärme verwandelt.

(b) Ein langer dünner Stab, der auf seiner Unterlage reibungslos gleiten soll, erhält im Abstand r von seinem Schwerpunkt M einen Stoß \vec{S}_F . Er führt eine Translations- und eine Rotationsbewegung aus. Gesucht sind wieder Bahn- und Winkelgeschwindigkeit.

Da der Stab nirgends fixiert ist, muß er sich um seinen Schwerpunkt M drehen. Die Winkelgeschwindigkeit ω und die Bahngeschwindigkeit v sind

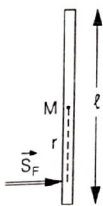


Fig. 10.6: Exzentrischer Anstoß eines Stabes, der auf einer ebenen Unterlage reibungslos gleiten kann.

jetzt völlig unabhängig voneinander. Erstere liefert der Drehimpulssatz:

$$S_M = r \cdot S_F = J_M \cdot \omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{r S_F}{J_M} = \frac{12r}{l^2} \cdot \frac{S_F}{m};$$

letztere liefert der Impulssatz

$$S_F = mv \quad \rightarrow \quad v = \frac{S_F}{m}.$$

Um die Unabhängigkeit der beiden Bewegungen voneinander zu unterstreichen und besser vergleichen zu können, wurde das Trägheitsmoment $\frac{1}{12}ml^2$ für einen langen dünnen Stab eingesetzt: Es ist klar ersichtlich $v \neq \omega r$. Die Winkelgeschwindigkeit läßt sich durch Wahl des Stoßangriffspunktes beeinflussen, die Bahngeschwindigkeit nicht. – Das zugehörige Experiment können Sie mit einem Bleistift, der auf einem glatten Tisch gleiten kann und den Sie mit dem Finger anstoßen, leicht selbst ausführen.

10.3 Nutation des symmetrischen momentenfreien Kreisels

Kreisel sind punktförmig gelagerte, um eine Achse durch ihren Schwerpunkt drehbare Körper. Die Bewegungsformen eines Kreisels sind äußerst interessant und in mancher Hinsicht unerwartet. Sie bilden die Grundlage zum Verständnis der Bewegung „atomarer Kreisel“ unter der Einwirkung von elektrischen und magnetischen Feldern. Hier sollen nur die einfachsten mechanischen Kreisel betrachtet werden.

Die folgende Darstellung beschränkt sich auf symmetrische Kreisel. Ein Kreisel ist dann symmetrisch, wenn sein Trägheitstensor eine besonders ausgezeichnete Achse, das Trägheitsellipsoid also Rotationssymmetrie besitzt. Es soll gelten

$$J_z \neq J_x, J_y; \quad J_x = J_y. \tag{10.20}$$

In Fig. 10.7 sieht man den Schnitt durch einen Kreisel, für den J_z das größte Trägheitsmoment darstellt, also $J_z > J_x = J_y$. Das damit eingeführte Koordinatensystem (x, y, z) ist ein Körpersystem, dessen z -Achse die *Figurenachse* des Kreisels markiert. Es ist sein Hauptachsensystem, das bei der Besprechung des Trägheitstensors mit (1), (2) und (3) bezeichnet wurde.

Des weiteren werden die durch den Winkelgeschwindigkeitsvektor $\vec{\omega}$ charakterisierte *momentane Drehachse* und die durch den Drehimpulsvektor \vec{L} gegebene *Drehimpulsachse* auftreten. Man hat es also insgesamt mit drei Achsen zu tun,

1. der Figurenachse \hat{z} ,
2. der momentanen Drehachse $\vec{\omega}$ und
3. der Drehimpulsachse \vec{L} .

Zunächst soll angenommen werden, daß der Kreisel *momentenfrei* gelagert ist. Von außen sollen keine Drehmomente angreifen können, insbesondere nicht das Schweredrehmoment. Dies erreicht man durch Lagerung des

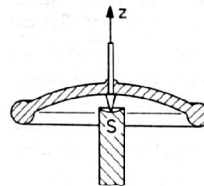


Fig. 10.7: Schnitt durch einen symmetrischen, in seinem Schwerpunkt S spitzengelagerten Kreisel.

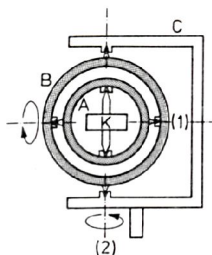


Fig. 10.8: In einer sogenannten kardanischen Aufhängung ist ein Kreisel im Schwerpunkt gelagert. Bei genügend präziser Ausführung der Spitzenlager kann die Bewegung des rotierenden Kreiselkörpers von einer Bewegung der äußeren Halterung C nicht mehr beeinflusst werden.

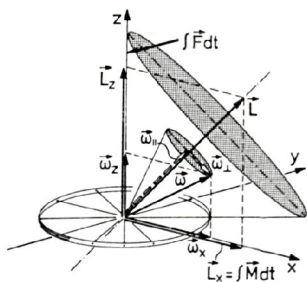


Fig. 10.9: Die Nutationsbewegung eines momentenfreien Kreisels wird mit einem im Schwerpunkt gelagerten Fahrradkreisel demonstriert. Der zunächst schlichte Lauf des Kreisels wird durch einen Stoß gegen die z-Achse gestört. Dadurch erhält das System zusätzlich zum vorhandenen Drehimpuls \vec{L}_z einen Drehimpuls \vec{L}_x . Nach dem Stoß ist der Gesamtdrehimpuls wieder konstant und raumfest. Die Figurenaxe des Kreisels muß sich auf einem Kreiskegel um die Drehimpulsaxe herumbewegen.

Kreisels im Schwerpunkt. Der Drehimpulserhaltungssatz stellt dann sicher, daß der Drehimpulsvektor \vec{L} nach Betrag und Richtung konstant ist:

$$\vec{M}_a = 0 \rightsquigarrow d\vec{L}/dt = 0 \rightsquigarrow \vec{L} = const. \quad (10.21)$$

Die einfachste Kreiselsbewegung liegt dann vor, wenn die drei genannten Achsen \hat{z} , $\vec{\omega}$ und \vec{L} zusammenfallen. Der Kreisel dreht sich dann um eine Hauptträgheitsachse. Wir haben den *schlichten Lauf* des Kreisels. Der Kreisel „steht“ im Raum. Am schönsten ist dies mit einem Kreisel im *kardanischen Gehänge*¹ demonstrierbar (Fig. 10.8), in dem man den rotierenden Kreisel spazierentragen kann, ohne die einmal ausgerichtete Kreiselschse zu verändern. Der Kreisel hängt dabei in einer Halterung A, die im Ring B um die Achse (1) frei drehbar ist; der Ring B ist wiederum um die Achse (2) drehbar im Gestell C gelagert. Die beiden zueinander senkrechten Drehachsen (1) und (2) gestatten die Einstellung der Kreiselschse in jede beliebige Richtung. Alle Achsen verlaufen durch den Kreiselschwerpunkt.

Durch einen kurzen Stoß gegen die Figurenaxe kann ein schlicht laufender, momentenfreier Kreisel in eine *Nutationsbewegung* versetzt werden: Die drei genannten Achsen werden durch den Stoß getrennt. Die Figurenaxe bewegt sich dann – gut sichtbar – auf einem Kegelmantel. Einzelheiten der Nutationsbewegung werden an dem in Fig. 10.9 gezeigten Fahrradkreisel erläutert, der in seinem Mittelpunkt gelagert ist.

Der schlicht laufende Kreisel besitzt zunächst nur die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_z$ und den dazu parallelen Drehimpuls

$$\vec{L}_z = J_z \cdot \vec{\omega}_z \quad (10.22)$$

Der Stoß $\vec{S}_F = \int \vec{F} dt$ möge in negativer y-Richtung gegen die Figurenaxe \hat{z} erfolgen. Er entspricht einem Momentenstoß $\vec{S}_M = \int \vec{M} dt$ in x-Richtung, denn der Kreisel wird ja im Mittelpunkt festgehalten. Er erhält dadurch zusätzlich die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_x$ und den damit verknüpften Drehimpuls

$$\vec{L}_x = \vec{S}_M = \int \vec{M} dt = J_x \cdot \vec{\omega}_x \quad (10.23)$$

Da die x-Achse auch eine Hauptachse des Trägheitstensors darstellt, sind $\vec{\omega}_x$ und \vec{L}_x ebenfalls parallel zueinander gerichtet. Wäre der Kreisel vor dem Stoß in Ruhe gewesen, würde er sich mit ω_x um die x-Achse drehen. Die nun aber wirklich vom Kreisel ausgeführte Bewegung entspricht der Überlagerung der beiden Drehbewegungen. Die beiden Winkelgeschwindigkeiten addieren sich zur Gesamtwinkelgeschwindigkeit, die beiden Teildrehimpulse zum Gesamtdrehimpuls.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_z; \quad \vec{L} = J_x \cdot \vec{\omega}_x + J_z \cdot \vec{\omega}_z \quad (10.24)$$

Wegen $J_x \neq J_z$ sind die beiden Vektoren $\vec{\omega}$ und \vec{L} nun nicht mehr parallel zueinander und auch nicht mehr parallel zur Figurenaxe \hat{z} . Nach erfolgtem Stoß ist der Kreisel wieder momentenfrei und folglich der Drehimpuls nach Betrag und Richtung konstant. Der Drehimpulsvektor markiert die *raumfeste*

¹ Geronimo Cardano 1501–1576

Drehimpulsachse. Da sich der Kreiselkörper aber in jedem Augenblick um die momentane Drehachse $\vec{\omega}$ (also weder um $\vec{\omega}_x$ noch um $\vec{\omega}_z$) dreht, können sich diese und die Figurenachse \hat{z} nur auf Kegelmänteln um die raumfeste Drehimpulsachse herum bewegen. Nur der Nutationskegel, den die Figurenachse beschreibt, ist im Experiment sichtbar. Die ebenfalls zeitlich unveränderliche Rotationsenergie

$$E_k^{(rot)} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{J} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \omega_{\parallel} \cdot L = const. \quad (10.25)$$

zeigt, daß bei konstantem Drehimpuls \vec{L} nur die zu ihm parallele Komponente ω_{\parallel} der Winkelgeschwindigkeit konstant sein kann; die Senkrechtkomponente ω_{\perp} muß ihre Richtung ständig ändern. Mit Hilfe der Poinsot-Konstruktion macht man sich leicht klar, daß bei einem symmetrischen Kreisel die drei Vektoren \hat{z} , $\vec{\omega}$ und \vec{L} stets in einer Ebene liegen. In Fig. 10.10 ist das die x, z -Ebene.

Führt man nun zu dem *Nutationskegel* der Figurenachse und dem *Rastpolkegel* der momentanen Drehachse noch einen mit der Figurenachse fest verbundenen *Gangpolkegel* ein, dann versteht man die Nutationsbewegung einfach durch das Abrollen des Gangpolkegels auf dem (im Raum „festgerasteten“) Rastpolkegel, deren gemeinsame Mantellinie die momentane Drehachse bildet (Fig. 10.11).

Zur quantitativen Berechnung der Nutationskreisfrequenz ω_N , mit der die $(\vec{\omega}, \vec{L}, \hat{z})$ -Ebene um die raumfeste Drehimpulsachse rotiert, sei noch einmal Fig. 10.9 betrachtet, die in Fig. 10.12 etwas abgeändert reproduziert wurde. Durch den Schlag gegen die Figurenachse erhielt das System zusätzlich die Winkelgeschwindigkeit ω_x , deren Betrag man auch in der Form

$$\omega_x = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\omega_z} \cdot \frac{|d\vec{\omega}_z|}{dt} \quad (10.26)$$

angeben kann. Die dadurch in Gang gesetzte Nutation erfolgt mit der Kreisfrequenz

$$\omega_N = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\omega_{z\perp}} \cdot \frac{|d\vec{\omega}_z|}{dt} \quad (10.27)$$

Hierin ist $\omega_{z\perp}$ die zur Drehimpulsachse senkrechte Komponente der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_z$. Beide Gleichungen zusammen ergeben

$$\omega_N = \frac{\omega_x \omega_z}{\omega_{z\perp}} = \frac{\omega_x}{\sin \beta} = \frac{\omega_x L}{L_x}$$

β ist der Winkel zwischen Drehimpuls- und Figurenachse. Mit $L_x = J_x \omega_x$ hat man schließlich einen Ausdruck für die Nutationsfrequenz in den Händen:

$$\text{Nutationskreisfrequenz: } \omega_N = \frac{L}{J_x} \quad (10.28)$$

Die Nutationsfrequenz ist um so größer, je größer der anfängliche Drehimpuls L_z des schlicht laufenden Kreisels gemacht wird. Das ist genau das, was man im Experiment beobachtet: eine schnelle Schlingerbewegung bei schnell laufendem Kreisel und eine langsame bei langsam rotierendem Kreisel.

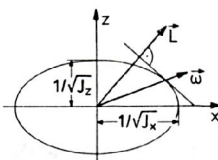


Fig. 10.10: Trägheitsellipsoid eines symmetrischen Kreisels mit \hat{z} als Figurenachse; der Drehimpulsvektor steht senkrecht auf der im Durchstoßpunkt der momentanen Drehachse $\vec{\omega}$ angelegten Tangentialebene an das Trägheitsellipsoid. Der die Nutationsbewegung des Kreisels einleitende Stoß gegen die Achse führt zur Auffächerung der drei Achsen \hat{z} , \vec{L} und $\vec{\omega}$, die aber stets in einer gemeinsamen Ebene liegen.

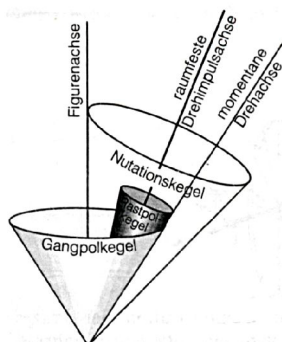


Fig. 10.11: Veranschaulichung der Nutationsbewegung mit Hilfe von drei Kegelflächen. Der Rastpolkegel mit der Drehimpulsachse ist raumfest. Auf ihm rollt der Gangpolkegel mit der Figurenachse ab. Die Auflagenlinie des Gangpolkegels auf dem Rastpolkegel stellt die momentane Drehachse dar.

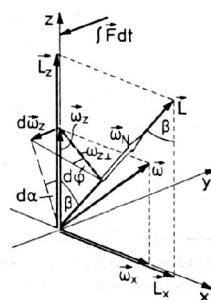


Fig. 10.12: Zur quantitativen Herleitung der Nutationsfrequenz ω_N , mit der sich die Figurenachse um die Drehimpulsachse \vec{L} dreht.

10.4 Präzession des symmetrischen Kreisels

Wird der Kreisel schließlich der Einwirkung eines äußeren Drehmoments ausgesetzt, indem man ihn z. B. nicht mehr im Schwerpunkt lagert, dann muß sich nach dem Drehimpulssatz sein Drehimpuls ständig ändern. Eine solche Änderung kann i. allg. auf mehrfache Weise geschehen. Zerlegt man den Drehimpuls gemäß

$$\vec{L} = \underline{J} \cdot \vec{\omega} = \underline{J} \cdot \omega \cdot \hat{\omega} \quad (10.29)$$

in drei Faktoren, dann liefert die zeitliche Differentiation drei Glieder:

$$\vec{M}_a = \frac{d\vec{L}}{dt} = \underbrace{\frac{d\underline{J}}{dt} \cdot \omega \cdot \hat{\omega}}_{(1)} + \underbrace{\underline{J} \cdot \hat{\omega} \cdot \frac{d\omega}{dt}}_{(2)} + \underbrace{\underline{J} \cdot \omega \cdot \frac{d\hat{\omega}}{dt}}_{(3)}. \quad (10.30)$$

Das bedeutet: Das von außen angreifende Drehmoment \vec{M}_a kann bewirken:

1. daß sich bei konstantem $\vec{\omega}$ der Trägheitstensor \underline{J} ändert, sei es dadurch, daß sich die Massenverteilung des Körpers relativ zur Drehachse ändert, d. h. sich Teile verschieben, oder daß die Drehung des Körpers um eine Nicht-Hauptträgheitsachse erfolgt und die Elemente des Tensors zeitabhängig werden. Dies sei hier ausgeschlossen, $\sim d\underline{J}/dt = 0$;
2. daß sich der Betrag der Winkelgeschwindigkeit ω ändert. Dieser Fall liegt vor, wenn der Kreisel angetrieben oder abgebremst wird. \vec{M}_a muß dann parallel oder antiparallel zur Figurenachse liegen. Auch das soll hier nicht sein; der einmal angetriebene Kreisel soll unbeeinflusst weiterrotieren. $\sim d\omega/dt = 0$.

Dann verbleibt nur noch,

3. daß sich die Richtung $\hat{\omega}$ der Winkelgeschwindigkeit ändert. Genau das passiert hier:

$$\vec{M} = \vec{M}_a = \underline{J} \cdot \omega \cdot \frac{d\hat{\omega}}{dt}. \quad (10.31)$$

Wir nehmen wieder den Fahrradkreisel (Fig. 10.13), dessen Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit wieder in z-Richtung zeigen mögen, und hängen ihn (z. B. an der x-Achse) so auf, daß sein Gewicht $\vec{F}_G = m\vec{g}$ ein Drehmoment \vec{M}_a ausüben kann, das dann in -y-Richtung zeigt. Im Experiment stellt man fest, daß der Kreiselkörper langsam um die Aufhängeachse rotiert. Er fällt also keineswegs herunter, wie man es bei einem nicht-rotierenden Körper erwartet, sondern führt eine Präzessionsbewegung aus. Er weicht senkrecht zur wirkenden Kraft aus, genau wie es Gl. (10.31) behauptet: Der Vektor $d\hat{\omega}$ der Richtungsänderung der Winkelgeschwindigkeit ist dem von außen angreifenden Drehmoment \vec{M}_a parallel gerichtet.

Die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}_p$ der Präzession ist unmittelbar angebar, wenn man die Drehung von $\vec{\omega}$ in der (y, z)-Ebene betrachtet (Fig. 10.14):

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{|d\hat{\omega}|}{dt}. \quad (10.32)$$

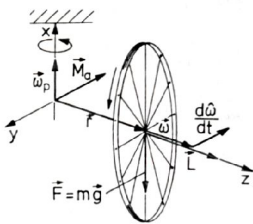


Fig. 10.13: Zur Demonstration der Präzessionsbewegung wird ein rotierender Fahrradkreisel an seiner Achse außerhalb des Schwerpunkts aufgehängt. Auf das dann einwirkende Schweredrehmoment $\vec{M}_a = \vec{r} \times \vec{F}$ reagiert er mit einer Ausweichbewegung, der Präzession. Der Drehimpulssatz $\vec{M}_a = d\vec{L}/dt$ fordert eine ständige Richtungsänderung des Drehimpulsvektors, die dem wirkenden Drehmoment parallel gerichtet ist: $d\vec{L} \parallel \vec{M}_a$.

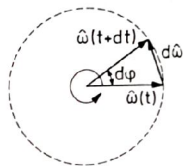


Fig. 10.14: Zur Herleitung der Präzessionsfrequenz ω_p . Die Winkelgeschwindigkeit des Kreisels ändert mit dieser Frequenz nur ihre Richtung.

Mit Hilfe von Gl. (10.31) gelangt man damit zur

$$\text{Präzessionskreisfrequenz } \omega_p = \frac{M_a}{L} = \frac{M_a}{J\omega}. \quad (10.33)$$

Dies kann man mit Hilfe von Fig. 10.13 auch vektoriell ausdrücken:

$$\vec{M}_a = \vec{\omega}_p \times \vec{L}. \quad (10.34)$$

Diese Gleichung gilt auch dann, wenn $\vec{\omega}_p$ und \vec{L} nicht mehr so schön senkrecht aufeinander stehen wie bei dem besprochenen einfachen Fahrradkreisel-Beispiel.

Präzession und Nutation, die hier getrennt behandelt wurden, treten bei Kreiseln, die nicht im Schwerpunkt gelagert sind, i. allg. gleichzeitig auf. Wenn man z. B. bei dem in Fig. 10.13 skizzierten Experiment die Kreiselachse (z-Achse) zunächst festhält und dann plötzlich losläßt, vollführt sie eine Nickbewegung, die eine Überlagerung von Präzession und Nutation darstellt (Fig. 10.15). Hieran erkennt man auch sehr schön, woher die kinetische Energie für die Präzessionsbewegung kommt: aus der potentiellen Lageenergie des Kreiselkörpers, nicht etwa auf dunklen Kanälen aus der Rotationsenergie des Kreisels selbst. Immer wenn sich die Spitze der Kreiselachse nach unten neigt, kommt die Präzessionsbewegung in Gang; sie stoppt wieder, wenn die Achse nach oben geht. Man hat also eine Schwingungsbewegung, einen ständigen Wechsel zwischen potentieller Energie und Präzessions-Rotationsenergie vorliegen.

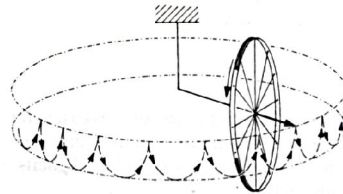


Fig. 10.15: Ein einseitig außerhalb seines Schwerpunkts aufgehängter Fahrradkreisel, dessen Achse man auf der anderen Seite plötzlich losläßt, führt gleichzeitig eine Nutations- und eine Präzessionsbewegung aus. Das plötzliche Angreifen des Schweredrehmoments wird vom System wie ein Stoß empfunden; Nutation und Präzession werden in Gang gesetzt, kommen aber durch ein Rückschwingen der Achse immer wieder zur Ruhe (Nickbewegung).

10.5 Beispiele zur Kreiselbewegung

(a) Freihändiges Fahrradfahren

Der Drehimpuls der Räder hilft dem Fahrer per Drehimpulserhaltungssatz die Balance zu halten. Beim Freihändigfahren stabilisiert er die Lage des Vorderrades. Leichtes Kippen des Fahrrades (Drehmoment \vec{M} , Fig. 10.16) läßt das Vorderrad mit $\vec{\omega}_p$ präzedieren: Es dreht sich in die gewünschte Fahrtrichtung. (Man muß allerdings festhalten: Beim Fahrrad ist der Winkel, unter dem die Lagerung der Vorderradgabel am Rahmen angebracht ist, wichtig. Das Vorderrad kippt auch schon beim stehenden Fahrrad in die richtige Richtung, wenn man es zur Seite neigt.)

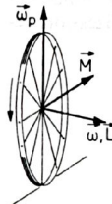


Fig. 10.16: Beim Freihändigen Fahrradfahren lenkt man das Fahrrad mit Hilfe der Präzession des Vorderrades.

(b) Diskus

Einer Diskusscheibe erteilt man beim Abwurf einen Drall \vec{L} . Dieser stabilisiert die Scheibe im Flug, so daß sie weitgehend ihre Lage beibehält. Die Tragflächenwirkung verleiht ihr eine Wurfweite, die beträchtlich größer ist als die einer mit gleicher Geschwindigkeit geworfenen Kugel zum Beispiel. Die anströmende Luft versucht, die Diskusfläche senkrecht zur Strömung zu drehen. Wegen des großen Drehimpulses macht sich eine Präzessions-



Fig. 10.17: Ein schwerer rotierender Diskus führt wegen seines großen Drehimpulses in Flug nur eine sehr geringfügige Präzessionsbewegung aus und behält fast über die ganze Flugbahn hinweg seine Schräglage bei. Unter Ausnutzung der Tragflächenwirkung fliegt er viel weiter als eine gleich schwere Kugel.

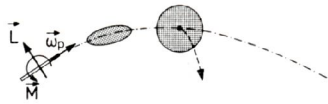


Fig. 10.18: Ein Bierdeckel ist als Diskusersatz ungeeignet. Der Drehimpuls, den man ihm mitgeben kann, ist wegen seines kleinen Trägheitsmoments nur gering.



Fig. 10.19: Durch einen Drall um die Längsachse werden Speere auf ihrer Flugbahn stabilisiert.

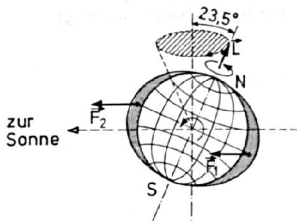


Fig. 10.20: Die Abweichung des Erdkörpers von der Kugelgestalt hat durch das von der Sonnenanziehung herrührende Drehmoment ($F_1 > F_2$) eine sehr langsame Präzessionsbewegung zur Folge.

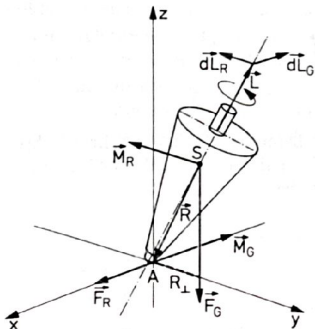


Fig. 10.21: Ein kegelförmiger Kinderkreisel dreht sich auf einem abgerundeten Fuß. Sein Tanzen stellt eine Präzessionsbewegung dar. (Erklärung siehe Text).

bewegung aber kaum bemerkbar (Gl. 10.33). – Im Gegensatz dazu ist die Präzession einer etwa gleich großen Pappscheibe (Bierdeckel), die man auch im Hörsaal werfen kann, wesentlich größer (etwa gleiches Drehmoment durch die anströmende Luft, aber kleiner Drehimpuls wegen geringer Masse). Die Pappscheibe hat sich lange vor Beendigung der Flugbahn bereits um 90° gedreht. Dann hört die Tragflächenwirkung sofort auf: Die Scheibe stürzt ab.

(c) Drall von Geschossen

Bei länglichen Geschossen, z. B. einem Speer, ist man an einer möglichst tangentialen Lage zur Flugbahn interessiert, damit das Ziel mit der Spitze des Geschosses erreicht wird und nicht etwa mit der Breitseite. Man verleiht ihnen daher einen Drall um die Längsrichtung. Die anströmende Luft übt ein Drehmoment aus und erzwingt eine Präzessionsbewegung der Geschößspitze, die sie immer nahe bei der gewünschten Flugbahn hält. In Fig. 10.19 ist die Präzessionsbewegung stark übertrieben.

(d) Erde als Kreisel

Die Erde ist ein abgeplattet-ellipsoidförmiger Körper. Sie dreht sich einmal pro Tag um sich selbst, besitzt also einen Drehimpuls \vec{L} , der von Süden nach Norden gerichtet ist. Da die Erdachse gegen die Ebene der Ekliptik (Ebene der Bahnellipse) geneigt ist, entsteht durch die Anziehungskraft der Sonne ein Drehmoment, das die Erdachse „aufzurichten“ versucht. Die Erdkreisellachse weicht senkrecht zur Kraftwirkung aus und beschreibt einen Präzessionskegel mit $23,5^\circ$ halbem Öffnungswinkel, der in 26 000 Jahren einmal umfahren wird.

(e) Spielkreisel

Die Bewegungsformen von Kreiseln werden noch vielfältiger, wenn Reibungseffekte mit hinzukommen. So kann man bereits das „Tanzen“ und „Aufstehen“ eines Spielkreisels ohne Berücksichtigung der Reibung nicht verstehen. Ein solcher kegelförmiger Kreisel besitzt einen runden Nagelkopf am spitzen Ende, auf dem er in kreis- oder spiralförmigen Bahnen auf ebenen Flächen tanzt. Er besitzt also keine raumfeste Lagerung. Nach dem Antreiben beginnt er seinen Lauf meist in mehr oder weniger starker Schräglage, etwa wie in Fig. 10.21 gezeichnet. Man stellt aber fest, daß er sich bereits nach kurzer Zeit aufrichtet. Im Gegensatz zur Erfahrung, daß sich selbst überlassene Körper ihren Schwerpunkt so tief wie möglich legen, versucht der Kreisel seinen Schwerpunkt S möglichst hoch über den Auflagepunkt A zu erheben. Zwei Kräfte bzw. Drehmomente bestimmen seine Bewegung. Die im Schwerpunkt angreifende Gewichtskraft F_G versucht mit dem Drehmoment $M_G = F_G \cdot R_\perp$ den Kreisel umzukippen. Sein Drehimpuls \vec{L} bewahrt ihn davor; die Kreisellachse weicht senkrecht zur Kraft, d. h. senkrecht zur (y, z) -Ebene, aus (\sim Drehimpulsänderung $d\vec{L}_G \parallel \vec{M}_G$); das ist die Ursache für eine Präzessionsbewegung. Außerdem aber greift im Auflagepunkt A eine Reibkraft \vec{F}_R an, im Beispiel der Fig. 10.21 in x -Richtung; das ergibt ein Drehmoment $\vec{M}_R = \vec{R} \times \vec{F}_R$ um den Schwerpunkt, das eine

Drehimpulsänderung $d\vec{L}_R$ erzwingt, die parallel zu \vec{M}_R gerichtet ist, also in der (y, z) -Ebene liegt; der Kreisel richtet sich auf! Das tut er nicht mehr, wenn man die Reibung dadurch ausschaltet, daß man ihn nicht auf einem runden Nagelkopf, sondern auf einer feinen Spitze laufen läßt; er kann nun nicht mehr tanzen; man schafft es kaum, ihm einen so großen Drall zu geben, daß er wenigstens ein bis zwei Präzessionsumläufe ausführen kann. Der Kreisel fällt schnell um.

(f) Atomare Kreisel

Viele Atome besitzen einen Drehimpuls \vec{L} und ein damit verknüpft magnetisches Moment \vec{m} . Dies sind Eigenschaften, die sie besitzen wie ihre Masse und die man ihnen genauso wenig wie diese nehmen kann, ohne sie zu zerstören. Das magnetische Moment macht das Atom zu einer kleinen „Magnetnadel“, die sich in einem Magnetfeld parallel zu den Feldlinien einzustellen trachtet. Der Drehimpuls macht das Atom aber auch zu einem kleinen Kreisel – und der reagiert auf die Drehmomentenwirkung des äußeren Magnetfelds mit einer Präzessionsbewegung. Das Atom präzediert mit seinem Drehimpuls um die Richtung des Feldes.

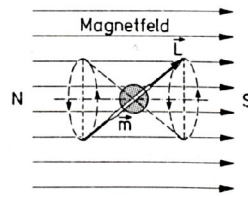


Fig. 10.22: Präzessionsbewegung eines Atoms mit dem Drehimpuls \vec{L} und dem magnetischen Moment \vec{m} in einem Magnetfeld.

10.6 Zusammenfassung

Rollbewegung		
kinetische Energie	$E_k = E_k^{(trans)} + E_k^{(rot)}$ $= \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J_M\omega^2$ $= \frac{1}{2}J_A\omega^2$	M: Schwerpunktsachse, A: momentane Drehachse.
Haftreibungskraft	$F_{HR} = \gamma \cdot F_{reib}$	$\gamma = \frac{J_M/mr^2}{1 + J_M/mr^2}$ $\gamma = 1/3 \text{ Vollzylinder,}$ $\gamma = 2/7 \text{ Kugel.}$
Kreisel		
Nutations-Kreisfrequenz	$\omega_N = L/J_x$	L: Drehimpuls, J _x : Trägheitsmoment ⊥ Kreiselachse.
Präzessions-Kreisfrequenz	$\omega_p = M_a/L$ $\vec{M}_a = \vec{\omega}_p \times \vec{L}$	M _a : äußeres Drehmoment.