Wusp – Übung 1

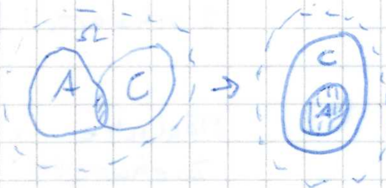
1) $\boxed{\text{OK by Tutor}}$

A… Person hat Löwe
B… Person hat Schlange
C… Person ist Mann

$A\cap B$… Person hat Löwe und Schlange
$A\cap B^c$… Person hat Löwe und keine Schlange
$A\cap C$… Person hat Löwe und ist ein Mann
$A\cap C^c$… Person hat Löwe und ist kein Mann

$P(A) = \frac{10}{10\,000} = \frac{1}{1000}$

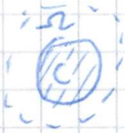
$P(A\cap C) = \frac{10}{10000}$



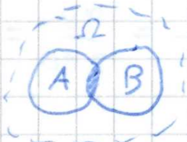
$P(B) = \frac{400}{10000} = \frac{4}{100}$

$P(A\cap C^c) = 0$

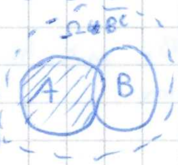
$P(C) = \frac{4000}{10\,000} = \frac{4}{10}$



$P(A\cap B) = \frac{4}{10\,000}$



$P(A\cap B^c) = \frac{10}{10\,000} - \frac{4}{10\,000}$
$= \frac{6}{10\,000}$ $\quad P(A) - P(A\cap B)$



$P(A) = \frac{1}{1000}$

$P(A|B) = \frac{P(A|B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10000}}{\frac{4}{100}} = \frac{4\cdot 100}{4\cdot 10000} = \frac{1}{100}$

$P(B|A) = \frac{P(A|B)}{P(A)} = \frac{\frac{4}{10000}}{\frac{1}{1000}} = \frac{4\cdot 1000}{4\cdot 10\,000} = \frac{4}{100}$

$P(A|B^c) = \frac{P(A\cap B^c)}{P(B^c)} = \frac{\frac{6}{10\,000}}{\frac{96}{100}} = \frac{6\cdot 100}{96\cdot 10\,000} = \frac{1}{1600}$

$P(A|C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{10}{10000}}{\frac{4}{10}} = \frac{100}{4\cdot 10\,000} = \frac{1}{400}$

$P(A|C^c) = 0$

2) OK by Tutor

10 Kugeln in Urne
4 weiße Kugeln
6 schwarze Kugeln

Ziehen von 4 Kugeln ohne Zurücklegen

Es sollen 2 weiße und 2 schwarze gezogen werden

2 weiße: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$

2 schwarze: $\binom{6}{2} = 15$

Mögliche Ziehungen: $\binom{10}{4} = 210$

Kombination 2 weiße und 2 schwarze: $\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{2} = 90$

Wahrscheinlichkeit $p = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{2}}{\binom{10}{4}} = \frac{90}{210} = \frac{3}{7}$

3) OK by Tutor

Konvex $\Rightarrow$ wenn man zwei W-maße mischt, bleibt man noch immer in diesem Raum

Mischung:
$p\mathbb{P} + (1-p)\mathbb{P}'$ mit $0 \leq p \leq 1$

$\Omega = \{K, Z\}$

Um zu zeigen, dass die Mischung ebenfalls ein W-maß ist muss gelten:

(1) $(p\mathbb{P} + (1-p)\mathbb{P}')(A) \geq 0$ und $(p \cdot \mathbb{P} + (1-p)\mathbb{P}')(A) \leq 1$

Es gilt $0 \leq p \leq 1$ damit gilt:

$0 \leq (p \cdot \mathbb{P}) \leq 1$ und $0 \leq (1-p) \cdot \mathbb{P}' \leq 1$

außerdem gilt $p + (1-p) = 1$ dadurch folgt:

$(p \cdot \mathbb{P} + (1-p)\mathbb{P}')(A) \leq 1$

(2) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

$$\mathbb{P}(\emptyset)_p + (1-p)\cdot \mathbb{P}'(\emptyset) = \emptyset$$
$$\Downarrow$$
$$0\cdot p + (1-p)\cdot 0 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$0 = 0$$

(3) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Es gilt $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und $\mathbb{P}'(\Omega) = 1$, daraus folgt:

$$\mathbb{P}(\Omega)_p + (1-p)\cdot \mathbb{P}'(\Omega) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$p + (1-p) = 1$$
$$\Downarrow$$
$$1 = 1$$

(4) Additivität

zu zeigen: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$

$$\mathbb{P}_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = p\,\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) + (1-p)\,\mathbb{P}'\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i) \text{ und } \mathbb{P}'\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}'(A_i)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{P}_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \underline{\sum_{i=1}^{\infty} p}\,\mathbb{P}(A_i) + \underline{\sum_{i=1}^{\infty}(1-p)}\,\mathbb{P}'(A_i) \qquad \text{--- = linear}$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{P}_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} p\,\mathbb{P}(A_i) + (1-p)\,\mathbb{P}'(A_i)$$
$$\Downarrow$$
$$\mathbb{P}_p\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}_p(A_i)$$

Beispiel

$\mathbb{P}(K) = 0.5$ $\quad \mathbb{P}'(K) = 0.9$ $\quad p = 0.7$

$\mathbb{P}(Z) = 0.5$ $\quad \mathbb{P}'(Z) = 0.1$

$$\mathbb{P}_p(K) = (0.7\,\mathbb{P} + 0.3\,\mathbb{P}')(K) = 0.62$$

$$\mathbb{P}_p(Z) = (0.7\,\mathbb{P} + 0.3\,\mathbb{P}')(Z) = 0.38$$

4)

i) $\boxed{\text{Not OK}}$

$$\mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}(A \cup B)\mathbb{P}(C)$$
$$\mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)) = (\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B))\mathbb{P}(C)$$
$$-\underbrace{P(A \cap C)}_{\emptyset}\underbrace{P(B \cap C)}_{\emptyset} + \mathbb{P}(A)P(C) + P(B)P(C) = \mathbb{P}(A)P(C) + P(B)P(C) - \underbrace{P(A \cap B)}_{\emptyset}P(C)$$
$$\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) + \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

ii) $\boxed{\text{Ok by Tutor}}$

$$P(A^c \cap B \cap C) = P(A^c)P(B)P(C)$$

$$P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = P(B) - P(A) \cap P(B)$$
$$= P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(A^c)$$

$$P(A^c \cap C) = P(C) - P(A \cap C) = P(C) - P(A) \cap P(C)$$
$$= P(C)(1 - P(A)) = P(C)P(A^c)$$

$$P(B \cap C) - P(A \cap B \cap C) = P(A^c)P(B)P(C)$$
$$P(B) \cap P(C) - P(A)P(B)P(C) = P(A^c)P(B)P(C)$$
$$P(B)P(C)(1 - P(A)) = P(A^c)P(B)P(C)$$
$$P(B)P(C)P(A^c) = P(A^c)P(B)P(C)$$

5) $\boxed{\text{Ok by Tutor}}$

$$\Omega = \{\underset{A,C}{(K,Z)}, \underset{B,C}{(Z,K)}, (Z,Z), \underset{A,B}{(K,K)}\}$$

$A = \{(K,Z),(K,K)\}$ $\quad B = \{(Z,K),(K,K)\}$ $\quad C = \{(K,Z),(Z,K)\}$

$P(A) = \frac{1}{2}$ $\quad P(A^c) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B) = \frac{1}{2}$ $\quad P(B^c) = \frac{1}{2}$ $\quad P(C) = \frac{1}{2}$ $\quad P(C^c) = \frac{1}{2}$

$P(A)P(B) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A)P(C) = \frac{1}{4}$ $\quad P(B)P(C) = \frac{1}{4}$

$P(A \cap B) = \frac{1}{4}$ $\quad P(A \cap C) = \frac{1}{4}$ $\quad P(B \cap C) = \frac{1}{4}$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A)P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B)P(C) \quad ✓$$

$P(A|B) = P(A)$ $\quad P(A|B) = P(A|B^c)$
$P(A|C) = P(A)$ $\quad P(B|A) = P(B|A^c)$
$P(B|A) = P(B)$ $\quad P(A|C) = P(A|C^c)$
$P(B|C) = P(B)$ $\quad P(C|A) = P(C|A^c)$ ✓
$P(C|A) = P(C)$
$P(C|B) = P(C)$ ✓

$$P(A \cap B \cap C) = 0$$
$$P(A)P(B)P(C) = \frac{1}{8}$$

$$P(A \cap B \cap C) \neq P(A)P(B)P(C) \quad ✗$$