Aufgabe 1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Ist $\emptyset$ linear unabhängig? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 2. Geben Sie die Definition eines Endomorphismus an. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Des Weiteren seien $E_1, E_2 : V \to V$ zwei Endomorphismen. Zeigen Sie:

$$\text{Rang}(E_1 \circ E_2) \leq \min\{\text{Rang}(E_1), \text{Rang}(E_2)\}.$$

Aufgabe 3. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $L((2, 19)) = (1, -1)$ und $L((307, 2) = (1, 1)$. Kann L eine lineare Abbildung sein? Überprüfen Sie, ob eine Basis B existiert, sodass die darstellende Matrix von L bezüglich B folgendermaßen aussieht:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4. Fassen Sie

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

als Adjazenzmatrix eines Graphen auf.
Definieren Sie zuerst die notwendigen mathematischen Objekte für eine vollständige Definition dieses Graphen. Handelt es sich um einen gerichteten oder ungerichteten Graphen? Begründen Sie anhand des Graphen wie A^4 aussieht ohne A^4 rechnerisch zu bestimmen.

Aufgabe 5. Zeigen oder widerlegen Sie, dass die Menge $\{(x, x^2) \mid x \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^2\}$ mit der üblichen Vektoraddition und skalaren Multiplikation einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet. Sei K der Körper $\mathbb{R}$. Fassen Sie K nun als Vektorraum über sich selbst auf. Bestimmen Sie eine Basis. Ändert sich die Dimension, wenn im Vergleich zum vorherigen Fall $K = \mathbb{C}$ angenommen werden würde?

Aufgabe 6. Betrachten Sie Vektorraum $V := \mathbb{R}^4$ über dem Körper $K := \mathbb{R}$.
Sei $U := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V : x_1 - x_2 = x_3 - x_4\}$.

a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist.

b) Finden Sie eine Basis von U, die $(1, 0, 1, 0)$ enthält und beweisen Sie, dass die von Ihnen definierte Menge tatsächlich eine Basis von U ist.

Aufgabe 7. a) Geben Sie eine bijektive Funktion f von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ an.

b) Geben Sie eine injektive, aber nicht surjektive Funktion an, definieren Sie dabei auch alles für die Funktion Notwendige.

c) Geben Sie ein Beispiel an für Funktionen g, h, sodass $g \circ h$ wohldefiniert ist und $g \circ h$ injektiv aber nicht surjektiv ist. Gehen Sie hierbei auch auf notwendige Eigenschaften von g respektive h ein.

Aufgabe 8. Seien U, V zwei Vektorräume über einem Körper K und $f : U \to V$ eine lineare Abbildung. Nehmen Sie an, dass f zudem injektiv sei. Überprüfen Sie folgende Aussagen und beweisen oder widerlegen Sie diese.

a) Seien $u_1, \ldots, u_m \in U$ linear unabhängig, dann sind $f(u_1), \ldots, f(u_m) \in V$ auch linear unabhängig.

b) Seien $u_1, \ldots, u_m \in U$ linear abhängig, dann sind $f(u_1), \ldots, f(u_m) \in V$ auch linear abhängig.

Aufgabe 9. Bestimmen Sie eine Basis des Lösungsraums des folgenden linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} a + 3b + 2c + d &= 0 \\ 3a + 9b + 7c + 5d &= 0 \\ 2a + 6b + 7c + 8d &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 10. Betrachten Sie

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finden Sie eine Vermutung für A^n und beweisen Sie Ihre Behaptung mittels vollständiger Induktion.
Hinweis: Sollten Sie zu keiner Vermutung finden, dann beschreiben Sie das Verfahren der vollständigen Induktion. Hierfür gibt es nur Teilpunkte. Es muss klar erkennbar sein, wofür Sie sich entscheiden, ansonsten führt dies zu keinen Punkten.