40. Man löse die inhomogene lineare Differentialgleichung

$xy'+y=x^2+3x+2$

eine lineare inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung sieht so aus:

$y'+a(x)\cdot y=s(x)$

also haben wir: $xy'+y=x^2+3x+2 \Rightarrow y'+\underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)}\cdot y=\underbrace{x+3+2\cdot\frac{1}{x}}_{s(x)}$

Es gilt außerdem der Satz:
Die Lösungsgesamtheit der linearen inhomogenen Differentialgleichung $y'+a(x)\cdot y=s(x)$ ist gegeben durch $y(x)=y_h(x)+y_p(x)$, wobei $y_h(x)$ die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $y'+a(x)\cdot y=0$ und $y_p(x)$ eine beliebige partikuläre Lösung der gegebenen inhomogenen Gleichung ist.

zu erst lösen wir mal die **homogene Gleichung:**

$xy'+y=0 \Rightarrow y'+\frac{1}{x}y=0 \Rightarrow y'=-\frac{1}{x}y \Rightarrow \frac{y'}{y}=-\frac{1}{x}\ \Big|\int$

$\ln|y|=-\ln x+c \Rightarrow$ da später entlogarithmiert wird, darf man auch schreiben:

$\ln|y|=-\ln x+\ln c=\ln c-\ln x=\ln\frac{c}{x}$ entlogarithmierten:

$y=\frac{c}{x}$ also wäre die **homogene Lösung** $y_h(x)=\frac{c}{x}$

inhomogene Gleichung: $xy'+y=x^2+3x+2$
die partikuläre Lösung bekommen wir durch „Variation der Konstanten" $c\rightarrow c(x)$

$y_h(x)=c\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow y_p(x)=c(x)\cdot\frac{1}{x}$ und nun in die inhomogene Gleichung einsetzen:
(Anmerkung: Achtung c(x) ist jetzt eine Funktion in x, also muss hier die Kettenregel angewendet werden bei y' bzw. c'(x))

$$xy'+y=x^2+3x+2 \Rightarrow x\cdot\left(c'(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot 1+c(x)\cdot\left(-1\cdot\frac{1}{x^2}\right)\right)+\left(c(x)\cdot\frac{1}{x}\right)=x^2+3x+2$$

$$x\cdot\left(\frac{1}{x}c'(x)-\frac{1}{x^2}c(x)\right)+\frac{1}{x}c(x)=x^2+3x+2$$

$$x\cdot\frac{1}{x}c'(x)-x\cdot\frac{1}{x^2}c(x)+\frac{1}{x}c(x)=x^2+3x+2$$

$$c'(x)-\frac{1}{x}c(x)+\frac{1}{x}c(x)=x^2+3x+2$$

$$c'(x)=x^2+3x+2\ \Big|\int$$

$$c(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}3x^2+2x=\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{2}x^2+2x$$

das Ganze noch in die **partikuläre Lösung** $y_p(x)=c(x)\cdot\frac{1}{x}$ einsetzen:

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{2}x^2 + 2x\right) \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{2}x + 2$$

am Schluss noch die **allgemeine Lösung** zusammenfassen:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) \Rightarrow y(x) = \frac{1}{x} \cdot c + \frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{2}x + 2$$