Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 2 (WS 2011)
Lösungen

Aufgabe 2.1 Entwerfen Sie jeweils einen deterministischen endlichen Automaten (DEA) für die folgenden Sprachen:

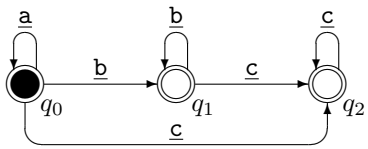
a) $\{\underline{\mathtt{a}}\}^*\{\underline{\mathtt{b}}\}^*\{\underline{\mathtt{c}}\}^*$

b) $\{\underline{\mathtt{a}}\,\underline{\mathtt{b}}\}^+\{\underline{\mathtt{c}}\}^*\{\underline{\mathtt{a}},\underline{\mathtt{b}}\}^*$

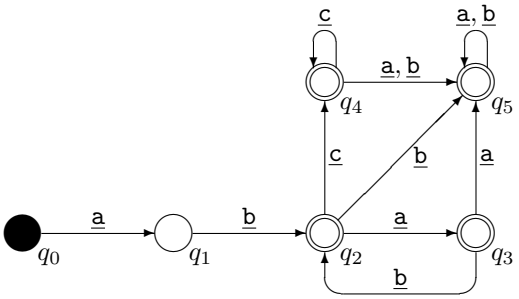
c) $\{\underline{\mathtt{a}}^{2m}\}^*\{\underline{\mathtt{a}}^m\}$ ($m \geq 1$ ist eine beliebige Konstante)

Lösung

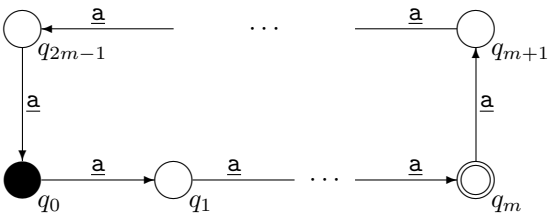
a)



b)



c)



Aufgabe 2.2 Konvertieren Sie folgende NEA $\mathcal{A}'$ jeweils in einen äquivalenten DEA $\mathcal{A}$ (Hinweis: Betrachten Sie nur tatsächlich erreichbare Zustände!) und geben Sie die vom jeweiligen DEA akzeptierte Sprache an.

a) $\mathcal{A}' = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 2\}, \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}, \delta, q_0, \{q_2\})$ wobei

δ	$\underline{\mathtt{a}}$	$\underline{\mathtt{b}}$
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{\}$	$\{\}$

b) $\mathcal{A}' = (\{q_i \mid 0 \leq i \leq 4\}, \{\underline{0}, \underline{1}\}, \delta, q_0, \{q_1, q_3\})$ wobei

δ	$\underline{0}$	$\underline{1}$
q_0	$\{q_1, q_3\}$	$\{\}$
q_1	$\{\}$	$\{q_2\}$
q_2	$\{q_1\}$	$\{\}$
q_3	$\{\}$	$\{q_4\}$
q_4	$\{q_3\}$	$\{\}$

Lösung

a) Wir erhalten folgende Übergangsfunktion des DEA $\mathcal{A}$:

$\widehat{\delta}$	$\underline{\mathtt{a}}$	$\underline{\mathtt{b}}$
$\{q_0\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$
$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0, q_2\}$
$\{q_0, q_2\}$	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_0\}$

Startzustand des DEA: $\{q_0\}$

Endzustand des DEA: $\{\{q_0, q_2\}\}$

Die von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$ akzeptierte Sprache ist $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}') = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*\{\underline{\mathtt{a}}\underline{\mathtt{b}}\}$.

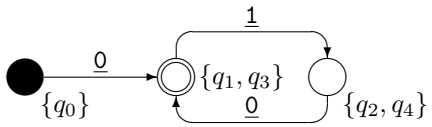
b) Wir erhalten folgende Übergangsfunktion des DEA $\mathcal{A}$:

$\widehat{\delta}$	$\underline{0}$	$\underline{1}$
$\{q_0\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{\}$
$\{q_1, q_3\}$	$\{\}$	$\{q_2, q_4\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$
$\{q_2, q_4\}$	$\{q_1, q_3\}$	$\{\}$

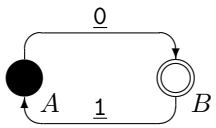
Startzustand des DEA: $\{q_0\}$

Menge der Endzustände: $\{\{q_1, q_3\}\}$

Das Zustandsdiagramm von $\mathcal{A}$ (ohne Falle) sieht so aus:



Man kann sich auch noch überlegen, dass der entsprechende Minimalautomat so aussieht:



Die von $\mathcal{A}$ bzw. $\mathcal{A}'$ akzeptierte Sprache ist $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{A}') = \{\underline{0}\,\underline{1}\}^*\{\underline{0}\}$.

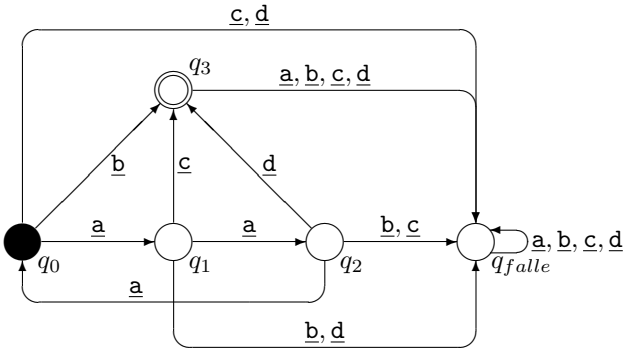
Aufgabe 2.3 Sei $\Sigma = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}, \underline{\mathtt{c}}, \underline{\mathtt{d}}\}$ und $L = \{\underline{\mathtt{a}}^{3n}\underline{\mathtt{b}} \mid n \geq 0\} \cup \{\underline{\mathtt{a}}^{3n+1}\underline{\mathtt{c}} \mid n \geq 0\} \cup \{\underline{\mathtt{a}}^{3n+2}\underline{\mathtt{d}} \mid n \geq 0\}$.

a) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ mit höchstens 5 Zuständen an, der L akzeptiert. Beschreiben Sie $\mathcal{A}$ sowohl durch einen Graphen als auch durch ein 5-Tupel.

b) Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}'$ an, der $\overline{L}$ (also das Komplement von L, wobei $\overline{L} = \Sigma^* - L$) akzeptiert.

Lösung

a)

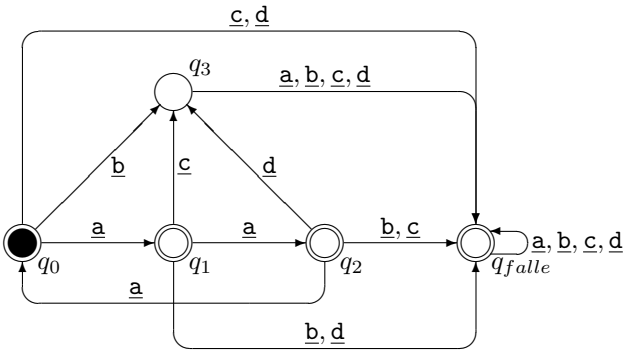


In formaler Schreibweise ist also

$\mathcal{A} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_{falle}\}, \{\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}\}, \delta, q_0, \{q_3\})$ mit

$\delta(q_0, \underline{a}) = q_1,\ \delta(q_0, \underline{b}) = q_3, \delta(q_0, \underline{c}) = \delta(q_0, \underline{d}) = q_{falle},$
$\delta(q_1, \underline{a}) = q_2,\ \delta(q_1, \underline{b}) = \delta(q_0, \underline{d}) = q_{falle}, \delta(q_1, \underline{c}) = q_3,$
$\delta(q_2, \underline{a}) = q_0,\ \delta(q_2, \underline{b}) = \delta(q_2, \underline{c}) = q_{falle},\ \delta(q_2, \underline{d}) = q_3,$
$\delta(q_3, \underline{a}) = \delta(q_3, \underline{b}) = \delta(q_3, \underline{c}) = \delta(q_3, \underline{d}) = q_{falle},$
$\delta(q_{falle}, \underline{a}) = \delta(q_{falle}, \underline{b}) = \delta(q_{falle}, \underline{c}) = \delta(q_{falle}, \underline{d}) = q_{falle}$

b) Den Automaten $\mathcal{A}'$ für $\overline{L}$ erhalten wir aus $\mathcal{A}$ nun dadurch, dass wir Endzustände und Nichtendzustände vertauschen (wobei es hier wesentlich ist, nicht auf dieFalle zu vergessen!):



Aufgabe 2.4 Lösen Sie mindestens einen der folgenden Unterpunkte:

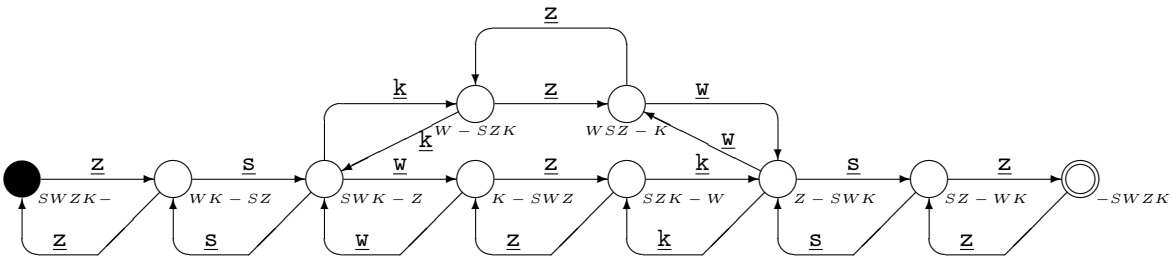
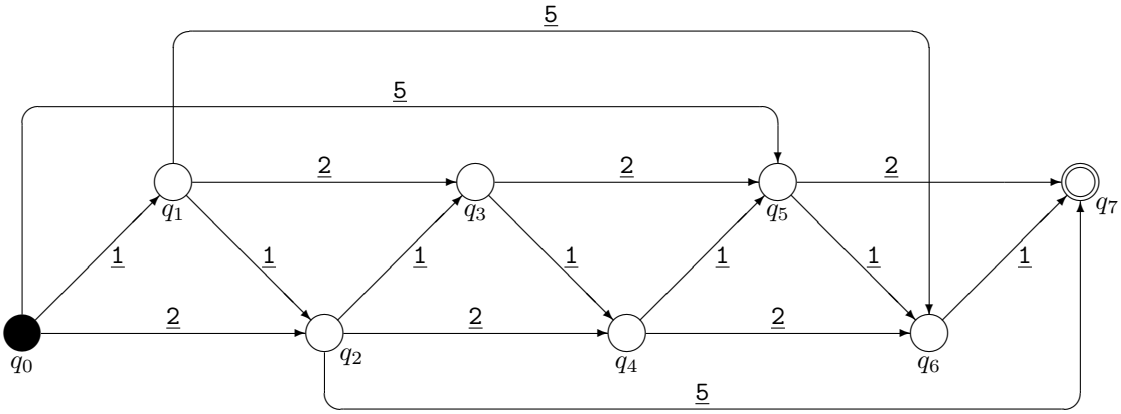
a) Eine Schäferin ist mit einem Wolf, einer Ziege und einem Kohlkopf unterwegs und muss einen Fluss überqueren. Dafür steht ein kleines Floß zur Verfügung, auf dem außer ihr selbst nur ein Tier oder der Kohlkopf Platz hat. Jedoch darf sie weder den Wolf mit der Ziege noch die Ziege mit dem Kohl auf einer Seite des Flusses allein lassen, da sonst der Wolf die Ziege, bzw. die Ziege den Kohlkopf fressen würde.

Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der alle erfolgreichen Überquerungen (d.h., Schäferin, Wolf, Ziege und Kohlkopf erreichen unbeschadet das andere Ufer) beschreibt. (Graphische Darstellung genügt, Falle kann weggelassen werden.)

b) Ein Getränkeautomat verlangt für ein bestimmtes Getränk nur 7 Cent. Allerdings muss dieser Betrag in Münzen exakt gezahlt werden, da der Automat nicht wechseln kann. Akzeptiert werden 1-, 2- und 5 Cent-Münzen. Konstruieren Sie einen deterministischen endlichen Automaten, der diesen Bedingungen genügt. (Graphische Darstellung genügt, Falle kann weggelassen werden.)

Lösung

a) In den Zuständen merken wir uns die aktuelle Konstellation, d.h., wer nach entsprechender Überquerung an den beiden Ufern steht. Der Anfangszustand ist $SWZK-$, also Schäferin (S), Wolf (W), Ziege (Z) und Kohlkopf (K) befinden sich am selben Ufer. Übergänge sind die Flussüberquerungen, wobei die Schäferin alleine (s), mit dem Wolf (w), mit der Ziege (z) oder mit dem Kohlkopf (k) übersetzen kann.



b)