Runde 9, Beispiel 58

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

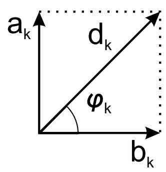
Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.01.2007

1 Angabe

Man berechne die Spektralkoeffzienten des N-periodischen diskreten Rechteckimpulses $(x_k)_k$ mit $> x_0 = x_{N-1} = 1$ und $x_j = 0$ für $j = 1, 2, ..., N-2$.

2 Theoretische Grundlagen: Spektraldarstellung der Fourier-Reihe

$$f(x) = s(x) = \frac{a_0}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cdot \sin(k \cdot x + \varphi_k)$$



mit der gemeinsamen Fourier-Amplitude

$$d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \varphi_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} \; \forall \, b_k > 0$$

Die **komplexe Form der Fourier-Reihe** lautet:

$$f(x) = s(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{j \cdot k \cdot x}, \qquad T = 2 \cdot \pi$$

Mit dem **Spektrum** der Funktion $f(x)$ (komplexe Fourier-Koeffizienten bzw. **Spektralkoeffizienten** c_k)

$$c_k = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2 \cdot \pi} f(x) \cdot e^{-j \cdot k \cdot x} \, \mathrm{d}\, x = \begin{cases} \frac{a_0}{2}, & \text{wenn } k = 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_k - j \cdot b_k), & \text{wenn } k > 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a_{-k} + j \cdot b_{-k}), & \text{wenn } k < 0 \end{cases}$$

Beziehungen:

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = k \cdot (c_k - c_{-k})$$

Zeitfunktion (Elektrotechnik): $x := \omega \cdot t$

- Bezugs- (Grund-) Kreisfrequenz: $\omega_0 = \frac{2\dot{\pi}}{T}$
- Kreisfrequenz: $\omega_k = k \cdot \omega_0$
- Periodemdauer: T
- (Linien-) Spektrum von $f(x)$: $2 \cdot \pi \cdot c_k$ bzw. $T \cdot c_k$
- Frequenzabstand zweier Spektrallinien: $\triangle\omega_0 = \frac{2\cdot\pi}{T}$

$$f(t) = s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \cdot e^{i\cdot k\cdot\omega_0\cdot t}$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot r^{-j\cdot k\cdot\omega_0\cdot t} \,\mathrm{d}\,t$$

3 Lösung des Beispiels

$$x_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-k\cdot j\cdot \frac{2\cdot\pi}{N}} \qquad \text{wegen}$$

$$c_0 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^0 = \frac{2}{N}$$

$$c_1 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-j} = \frac{1}{N} \cdot (1 + \omega^{-(N-1)})$$

$$c_2 = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-2\cdot j} = \frac{1}{N} \cdot (1 + \omega^{-2\cdot(N-1)})$$

$$\vdots$$

$$c_k = \frac{1}{N} \cdot \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot \omega^{-k\cdot j} = \frac{1}{N} \cdot (1 + \omega^{-k\cdot(N-1)})$$