Runde 9, Beispiel 62

LVA 118.181, Übungsrunde 9, 12.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 08.01.2007

1 Angabe

Berechnen Sie die Spektralfunktion von

$$f(t) = \begin{cases} t^2, & 0 < t < 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

2 Theoretische Grundlagen: Diskrete Fourier-Transformation.

Die **Fourier-Transformation** ist eine Integraltransformation, die einer Funktion eine andere Funktion (ihre Fouriertransformierte) zuordnet. Sie ist eng mit der Laplace-Transformation verbunden. In vielen Einsatzgebieten wird sie dazu verwendet, um für zeitliche Signale (z. B. ein Sprachsignal oder einen Spannungsverlauf) das Frequenzspektrum zu berechnen (vgl. Fourieranalyse).
Allgemein umfasst der Begriff Fourier-Transformation eine Reihe sehr ähnlicher Transformationen, welche Funktionen (auch endliche und unendliche Folgen sind Funktionen) in Frequenzkomponenten oder Elementarschwingungen zerlegen.
Die **Diskrete Fourier-Transformation** oder DFT ist die Fourier-Transformation eines zeitdiskreten endlichen oder periodischen Signals und somit ein Spezialfall der Z-Transformation mit Werten auf dem Einheitskreis für z. Die DFT ist das wichtigste Werkzeug in der Praxis der digitalen Signalverarbeitung, da es schnelle Algorithmen zum Durchführen der Transformation gibt. Am bekanntesten ist die FFT (Fast Fourier Transformation), die schnelle Fourier-Transformation.
Die diskrete Fourier-Transformierte $\hat{a} = (\hat{a}_0, ..., \hat{a}_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ eines komplexen Vektors $a = (a_0, ..., a_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ hat die Koeffizienten

$$\hat{a}_k = \sum_{j=0}^{N-1} e^{-2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{jk}{N}} \cdot a_j, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

Dabei nennt man die $\hat{a}_k$ auch Fourierkoeffizienten oder Fourierkomponenten.
Die inverse DFT (iDFT) a von $\hat{a} \in \mathbb{C}^N$ hat die Koeffizienten

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{2\pi \mathrm{i} \cdot \frac{jk}{N}} \cdot \hat{a}_j, \qquad k = 0, \ldots, N-1.$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \dot{e}^{-i \cdot \omega \cdot t} \, \mathrm{d}\, t$$

3 Lösung des Beispiels

$$F(\omega) = \int_0^1 e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot t^2 \cdot f(t)\,\mathrm{d}\,t = \ldots \blacklozenge \cdots = \frac{1}{\omega^3} \cdot (e^{-i\cdot\omega} \cdot (i \cdot \omega^2 + 2 \cdot \omega - 2 \cdot i) + 2 \cdot i)$$

$\blacklozenge$ zweimal partiell integrieren

- Für $\omega \neq 0$:

$$F(\omega) = \frac{1}{\omega^3} \cdot (e^{-i\cdot\omega} \cdot (i \cdot \omega^2 + 2 \cdot \omega - 2 \cdot i) + 2 \cdot i)$$

- Für $\omega = 0$: $F(\omega) = \frac{1}{3}$.