

DRMOTA PRÜFUNG – 19.03. 2004

praktischer teil:

1.)

Man erläutere das Prinzip der vollständigen Induktion anhand des folgenden Beispiels:

$$\cos(x) \cos(2x) \cos(4x) \dots \cos(2^{n-1} x) = (\sin(2^n x)) / (2^n \sin(x))$$

für alle n aus $\mathbb{N}^+$, x aus $\mathbb{R}$, $x \neq k \cdot \pi$

Alle Schritte des Induktionsbeweises sind genau anzugeben!

(Hinweis: verwenden Sie die Identität: $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$)

2.)

Bestimmen Sie $\det(A^3)$ für

Code:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 2 \\ 3 & 12 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie weiters, ob die Matrix A invertierbar ist und bestimmen Sie ggf. $\det(A^{-1})$.

3.)

Bestimmen Sie alle Lösungen über $\mathbb{R}$ von

$$x - y + z + u = -2$$

$$2x + y - 2z + u = 2$$

$$7x + 5y - 9z + 3u + v = 10$$

mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren.

4.)

Untersuchen Sie folgende Reihen auf Konvergenz:

Code:

a)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{5^n}$	b)	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n}{n^2 + 2}$
----	---------------------------------------	----	---

Theoriefragen:

1.)

Wann ist R Teilmenge von $M \times M$ eine Äquivalenzrelation?

Alle definierenden Eigenschaften sind genau anzuführen.

(4 Punkte)

2.)

Was versteht man unter einer Permutation einer endlichen Menge?

Was versteht man unter einer Permutation einer endlichen Multimenge?

Geben Sie jeweils auch eine Formel für die Anzahl an!

Wieso entsprechen die Permutationen einer Multimenge, die aus k -mal dem Element a und $(n-k)$ -mal dem Element b besteht, den k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen

Menge?
(4 Punkte)

3.)

Wie sind die algebraischen Strukturen Gruppoid, Halbgruppe, Monoid und Gruppe definiert?
Alle Eigenschaften genau

(4 Punkte)

4.)

Wann ist eine Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig an der Stelle x_0 ?

Wann ist eine Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle x_0 ?

Wann ist eine Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar an der Stelle x_0 ?

(4 Punkte)

5.)

Wie ist der Rang $\text{rg}(A)$ einer Matrix A definiert?

(1 Punkt)

6.)

Wann ist eine Abbildung $f: U \rightarrow V$ (U, V Mengen) surjektiv?

(1 Punkt)