2 STOCHASTISCHE GRUNDBEGRIFFE

2.4 Wahrscheinlichkeitsräume

1. Man vereinfache soweit wie möglich ($AB \equiv A \cap B$):

   (a) $(A \cup B)(A \cup B^c)$
   (b) $(A \cup B)(B \cup C)$
   (c) $(A \cup B)(A^c \cup B)(A \cup B^c)$
   (d) $(AB) \cup (AB^c)$
   (e) $(A \cup B)(A^c \cup B)(A \cup B^c)$

2. A, B, C sind drei Ereignisse. Ermitteln Sie Ausdrücke für die Ereignisse, daß von A, B, C

   (a) nur A eintritt;
   (b) A und C, aber nicht B eintritt;
   (c) zumindest eines eintritt;
   (d) zumindest zwei eintreten;
   (e) alle drei eintreten;
   (f) keines eintritt;
   (g) höchstens eines eintritt;
   (h) höchstens zwei eintreten;
   (i) genau zwei eintreten;
   (j) höchstens drei eintreten.

3. Zeigen Sie die DeMorgan'schen Regeln für Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ aus einem Ereignisfeld $\mathcal{E}$:

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c, \qquad \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

*4. Man betrachte als Merkmalraum M die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ und als Ereignissystem $\mathcal{E}$ die Klasse aller Teilmengen A von M für die gilt: A ist endlich oder A^c ist endlich. So gehört beispielsweise die Menge $\{10, 11, \ldots\}$ zu $\mathcal{E}$, da das Komplement dieser Menge endlich ist; hingegen gehört beispielsweise die Menge der geraden Zahlen nicht zu $\mathcal{E}$, da weder die Menge selbst noch ihr Kompliment endlich ist.

   (a) Ist das so definierte Ereignissystem $\mathcal{E}$ ein Ereignisfeld?

   (b) Wahrscheinlichkeiten für Elemente aus $\mathcal{E}$ werden nun wie folgt definiert:

$$W(A) = \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich} \\ 1 & \text{falls } A^c \text{ endlich} \end{cases}$$

   Man überlege sich, daß die so definierten Wahrscheinlichkeiten endlich additiv, nicht aber σ–additiv sind (ansonsten aber alle Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung haben).

2.4.1 Diskrete W–Räume

5. Ein Zufallsexperiment bestehe aus dem Ziehen einer Karte aus einem gewöhnlichen Kartenpaket mit 52 Karten. Die W–Verteilung ordnet jedem der möglichen Versuchsausgänge eine Wahrscheinlichkeit von $1/52$ zu. A_1 sei das Ereignis, daß Sie ein Herz ziehen und A_2 das Ereignis, daß Sie einen König ziehen. Bestimmen Sie $W(A_1)$, $W(A_2)$, $W(A_1 \cap A_2)$ und $W(A_1 \cup A_2)$.

6. Eine Münze wird solange geworfen, bis zum ersten Mal „Kopf" (K) geworfen wird. Die Elemente des Merkmalraums M sind also ($Z =$ „Zahl") K, ZK, ZZK, $ZZZK$, $\ldots$. Die W–Verteilung ordnet jedem dieser Elemente die folgenden Wahrscheinlichkeiten zu: $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, $\ldots$.

   (a) Zeigen Sie, daß $W(M) = 1$.

   (b) Es sei $A_1 = \{K, ZK, ZZK, ZZZK, ZZZZK\}$ und $A_2 = \{ZZZZK, ZZZZZK\}$. Bestimmen Sie $W(A_1)$, $W(A_2)$, $W(A_1 \cap A_2)$ und $W(A_1 \cup A_2)$.

   (c) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, daß der erste Kopf bei einem ungeraden Wurf kommt.

   (d) Ermitteln Sie allgemein die Wahrscheinlichkeit mit der man öfter als x Mal werfen muß, bis zum ersten Mal Kopf kommt.

2.4.2 Kontinuierliche W–Räume

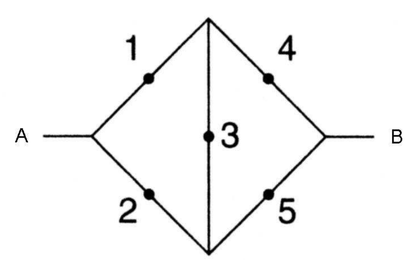
7. Der Merkmalraum sei $M = \mathbb{R}$ und $A \subset M$ eine Menge (z.B. ein Intervall), für die das Integral $\int_A e^{-|x|}\,dx$ existiert. Zeigen Sie, daß auf diese Weise keine Wahrscheinlichkeitsverteilung für Teilmengen von M definiert wird. Wenn man die Form des Integranden beibehalten möchte, mit welcher Konstanten muß man ihn multiplizieren, damit eine W–Verteilung definiert wird?
8. Der Merkmalraum M bestehe aus der Menge der Punkte, die im Inneren oder am Rand eines Quadrats mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1)$ liegen. Es sei $W(A) = \int\int_A dx\,dy$.
   (a) Zeigen Sie, daß auf diese Weise eine W–Verteilung definiert wird.
   (b) Bestimmen Sie $W(A_1)$ für $A_1 = \{(x,y) : 0 < x < y < 1\}$.
   (c) Bestimmen Sie $W(A_2)$ für $A_2 = \{(x,y) : 0 < x = y < 1\}$.
   (d) Bestimmen Sie $W(A_3)$ für $A_3 = \{(x,y) : 0 < x/2 \le y \le 3x/2 < 1\}$.

2.4.3 Satz (Eigenschaften)

9. Zeigen Sie die *Boole'sche Ungleichung* (A_i, $i = 1, \ldots, n$ sind Ereignisse aus einem Ereignisfeld):
$$W\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} W(A_i)$$
10. Zeigen Sie die *Bonferroni'sche Ungleichung* (A_i, $i = 1, \ldots, n$ sind Ereignisse aus einem Ereignisfeld):
$$W\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) \ge 1 - \sum_{i=1}^{n} W(A_i^c)$$

2.4.4 Additionstheorem

11. Formulieren und beweisen Sie das Additionsthorem für drei Ereignisse A, B, C.
12. Die 10 Titel auf einer CD werden in zufälliger Reihenfolge abgespielt (*shuffle play*). Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei kein Titel an der auf der CD angegebenen Stelle wiedergegeben? (*Hinweis:* Verwenden Sie das Additionstheorem mit A_i = Der i–te Titel wird an i–ter Stelle wiedergegeben.)
13. In der folgenden Brückenschaltung sind die Verbindungen (unabhängig voneinander) mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit p ($0 \le p \le 1$) intakt. Die Schaltung ist intakt, wenn Strom von A nach B fließen kann.



E sei das Ereignis, daß die Schaltung intakt ist, und V_i das Ereignis, daß Verbindung i intakt ist.
   (a) Wie lautet ein passender Merkmalraum? Wie läßt sich V_i auf Basis dieses Merkmalraums ausdrücken?
   (b) Drücken Sie E mit Hilfe von V_i, $i = 1, \ldots, 5$, aus.
   (c) Benützen Sie die Darstellung von (b) um $W(E)$ mit Hilfe des Additionstheorems zu berechnen.
   *(d) Berechnen Sie $W(E)$ mit Hilfe des Satzes von der vollständigen Wahrscheinlichkeit, indem Sie durch den Status (intakt/defekt) von Verbindung 3 bedingen.
14. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt man bei n Würfen mit einem symmetrischen Würfel genau 3 verschiedene Augenzahlen? (*Bsp.:* Ein günstiges Ergebnis bei 10 Würfen wäre z.B. 1533515111.)

2.4.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

15. Stimmt es, daß für den Fall, daß die bedingte Wahrscheinlichkeit $W(A|B)$ größer als die unbedingte Wahrscheinlichkeit $W(A)$ ist, auch $W(B|A)$ größer als $W(B)$ ist? Wenn ja, gilt das auch analog für 'kleiner' bzw. 'gleich' an Stelle von 'größer'?
16. A_i, $i = 1, \ldots, k$, sei eine Partition des Merkmalraums M (d.h., die A_i sind disjunkt und ihre Vereinigung ist gleich M). Für das Ereignis B gelte $W(B) > 0$ und $W(A_1|B) < W(A_1)$. Zeigen Sie, daß dann $W(A_i|B) > W(A_i)$ für zumindest ein $i = 2, 3, \ldots, k$.
17. Ein Parallelsystem funktioniert, wenn wenigstens eine seiner Komponenten funktioniert. Betrachten Sie ein Parallelsystem aus n Komponenten, die unabhängig voneinander mit Wahrscheinlichkeit p arbeiten. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der Komponente 1 funktioniert, wenn man weiß, daß das System funktioniert.
18. Jemand fliegt von Los Angeles nach Wien mit Zwischenlandungen in New York, London und Frankfurt. Bei jeder Zwischenlandung wird die Maschine gewechselt, wobei an jedem Flughafen (einschließlich LA) das Gepäck mit gleichbleibender Wahrscheinlichkeit q $(0 < q < 1)$ in ein falsches Flugzeug verladen wird. In Wien fehlt das Gepäck; mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Fehler in LA, NY, L, F passiert? Wo ist die Wahrscheinlichkeit am größten? Rechnen Sie allgemein und für $q = 0.05$.

2.4.6 Multiplikationstheorem

19. Einem Los, bestehend aus 100 Einheiten, werden hintereinander 5 Einheiten ohne Zurücklegen entnommen und geprüft. Ist zumindest eine dieser Einheiten defekt, wird das Los zurückgewiesen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das Los zurückgewiesen, wenn 5% der Einheiten defekt sind?
20. Aus einem gewöhnlichen Kartenpaket werden hintereinander und ohne Zurücklegen Karten gezogen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird das dritte Herz bei der sechsten Ziehung gezogen? Wie groß ist diese Wahrscheinlichkeit, wenn die Ziehungen mit Zurücklegen erfolgen?
21. Fünf Studenten und zehn Studentinnen werden willkürlich in fünf Arbeitsgruppen zu je drei Personen aufgeteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gibt es in jeder Arbeitsgruppe einen Studenten?

2.4.7 Satz v. d. vollständigen Wahrscheinlichkeit

22. In einem Behälter befinden sich n Kugeln, $n-1$ schwarze und eine weiße. Zwei Personen ziehen abwechselnd nacheinander willkürlich jeweils eine Kugel. Wer zuerst die weiße Kugel zieht, hat gewonnen. Man berechne die Wahrscheinlichkeit mit der die zuerst ziehende Person gewinnt, wenn die gezogene Kugel vor der nächsten Ziehung wieder zurückgelegt wird (und der Behälter gut durchgemischt wird). Ist das Spiel fair?

*23. [Fortsetzung des vorhergehenden Beispiels] Was ändert sich, wenn die gezogene Kugel vor der nächsten Ziehung nicht zurückgelegt wird? Spielt es dabei eine Rolle, ob n eine gerade oder eine ungerade Zahl ist?

24. Betrachten Sie das folgende 2–stufige Experiment: Zuerst werfen Sie einen Würfel; anschließend soviele (gleichartige) Münzen wie die zuvor geworfene Augenzahl und zählen die Zahl der „Köpfe“. Wenn A_k das Ereignis ist, daß es k Köpfe gibt, bestimmen Sie $W(A_k)$ für $k = 0, 1, \ldots, 6$. Welche Zahl von Köpfen ist am wahrscheinlichsten? (Vorher raten!)
25. Einer von zwei Behältern, bestehend aus je 10 Kugeln, enthält eine besondere Kugel (äußerlich von den anderen nicht unterscheidbar). Wenn man insgesamt 20 Ziehungen mit Zurücklegen frei hat, und sich die besondere Kugel mit Wahrscheinlichkeit 2/3 im ersten Behälter befindet, wie sollte man die Ziehungen aufteilen, um die Kugel mit maximaler Wahrscheinlichkeit zu ziehen? Wie groß ist die maximale Wahrscheinlichkeit?

2.4.8 Bayes'sche Formel

26. Das Lager eines Warenhauses umfaßt (äußerlich nicht unterscheidbare) Packungen mit Glühbirnen hoher, mittlerer und niedriger Qualität im Verhältnis 1:2:2. Eine Glühbirne hoher Qualität ist mit Wahrscheinlichkeit 0 defekt, eine mittlerer Qualität mit Wahrscheinlichkeit 0.1 und eine niedriger Qualität mit Wahrscheinlichkeit 0.2. Aus einer zufällig gewählten Packung werden zwei Glühbirnen entnommen und getestet;

beide sind intakt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um eine Packung mit Glühbirnen (1) hoher, (2) mittlerer, (3) niedriger Qualität?

27. Ein Behälter enthält n Kugeln, weiße und schwarze. Da nichts über die Zusammensetzung des Behälters bekannt ist, nimmt man zunächst an, daß jede mögliche Zusammensetzung a-priori die gleiche Wahrscheinlichkeit hat. Angenommen, eine Ziehung von k Kugeln hintereinander mit Zurücklegen ergibt nur weiße Kugeln:

    (a) Wie groß ist die (a-posteriori) Wahrscheinlichkeit, daß der Behälter nur weiße Kugeln enthält?

    (b) Wie groß sind die (a-posteriori) Wahrscheinlichkeiten für die anderen Zusammensetzungen des Behälters?

28. Eine typische Anwendung der Bayes'schen Formel liegt in der Beurteilung diagnostischer Tests. Angenommen, ein Test zeige bei Vorliegen einer bestimmten Erkrankung K mit 98% Wahrscheinlichkeit ein positives Ergebnis T_+ (diese W. heißt auch die *Sensitivität* des Tests), und mit einer Wahrscheinlichkeit von 99.5% bei nicht erkrankten Personen ein negatives Ergebnis T_- (diese W. heißt auch die *Spezifität* des Tests); 0.1% der Gesamtpopulation seien an K erkrankt (dieser Anteil ist die a-priori Wahrscheinlichkeit oder die *Prävalenz* von K).

    Bestimmen Sie mit Hilfe der Bayes'schen Formel die (a-posteriori) Wahrscheinlichkeiten $W(K|T_+)$ und $W(K^c|T_-)$. Geben Sie eine anschauliche Erklärung für den (unerwartet?) kleinen Wert von $W(K|T_+)$.

2.5 Stochastische Unabhängigkeit

2.5.1 Definition und Satz

29. Eine Zahl wird zufällig aus der Menge $\{1, \ldots, 30\}$ ausgewählt. A sei das Ereignis, daß diese Zahl gerade ist, B das Ereignis, daß sie durch 3 teilbar ist und C das Ereignis, daß sie durch 5 teilbar ist. Diskutieren Sie die stochastische Unabhängigkeit dieser Ereignisse.

30. Angenommen, alle 365 Tage eines Jahres kommen mit gleicher Wahrscheinlichkeit als Geburtstage in Frage. Betrachten Sie 3 Personen und für $i < j$ die Ereignisse B_{ij} = Person i ist am selben Tag wie Person j geboren. Diskutieren Sie die stochastische Unabhängigkeit dieser Ereignisse.

31. $A_1, \ldots, A_n$ seien unabhängige Ereignisse mit $W(A_i) = p$ für alle $i = 1, \ldots, n$. Ermitteln Sie einen möglichst einfachen Ausdruck für $W\left(\bigcup_i A_i\right)$.

2.5.2 Produktwahrscheinlichkeitsräume

32. Ein Würfel wird einmal geworfen. Wie lautet zu diesem Experiment ein passender W–Raum $(M, \mathcal{E}, W)$? Nun wird dieser Würfel n–mal geworfen. Bestimmen Sie den Produktwahrscheinlichkeitsraum $\left(M_n, \mathcal{E}_n, W_n\right)$.

*33. Betrachten Sie das folgende 2–stufige Experiment: Zuerst werfen Sie einen Würfel; anschließend soviele (gleichartige) Münzen wie die zuvor geworfene Augenzahl und zählen die Zahl der „Köpfe". Bestimmen Sie einen passenden W–Raum für dieses Experiment.

2.6 Stochastische Größen

34. Ein Würfel wird n–mal (oder n Würfel je einmal) geworfen. Begründen Sie, warum die folgenden Abbildungen X von $M = \{1, 2, \ldots, 6\}^n$ nach $\mathbb{R}$ (oder $\mathbb{R}^2$) stochastische Größen sind:

    (a) X = Augenzahl des i–ten Wurfs (oder Würfels)

    (b) X = Summe aller n Augenzahlen

    (c) X = kleinste Augenzahl

    (d) X = größte Augenzahl

    (e) X = (kleinste Augenzahl, größte Augenzahl)

(f) X = größte Augenzahl – kleinste Augenzahl

35. [Fortsetzung des vorgehenden Beispiels] Bestimmen Sie speziell für $n = 2$ für zumindest zwei dieser Größen ihre Verteilung, d.h. $W\{X = x\}$ für $x \in M_X$.

36. Eine Packung enthält 10 Chips derselben Größe und Form. Genau zwei der Chips sind defekt. Jemand zieht ohne Zurücklegen in zufälliger Reihenfolge einen Chip nach dem anderen bis der zweite defekte Chip gezogen wird. X sei die Nummer dieser Ziehung.

    (a) Ermitteln Sie $W\{X = k\}$, $k = 2, 3, \ldots, 10$.

    (b) Berechnen Sie $W\{X \leq 4\}$.

    (c) Ermitteln und zeichnen Sie $W\{X \leq x\}$ für $0 \leq x \leq 10$.

37. Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(M, \mathcal{E}, W)$ sei gegeben durch $M = \{c : 0 < c < 10\}$ und für $C \in \mathcal{E}$ sei $W(C) = \int_C \frac{1}{10}\, dx$. Zeigen Sie, daß $X(c) = c^2$ eine stochastische Größe ist und bestimmen Sie $W\{X \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$.