3. Übungsblatt (mit Lösungen)

3.0 VU Formale Modellierung

Marion Scholz, Gernot Salzer

28. Mai 2019

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Gegeben sei die Grammatik $G = \langle N, T, P, A \rangle$, wobei

$$
\begin{aligned}
N &= \{A, B, C\} \\
T &= \{\mathtt{i}, \mathtt{s}, \mathtt{o}, \mathtt{ri}, \mathtt{pi}\} \\
P &= \{\, A \to B \mid \texttt{"ri"}\, C\, \texttt{"pi"}\ , \\
&\qquad B \to \texttt{"i"}\, C \texttt{"i"} \mid \texttt{"o"}\ , \\
&\qquad C \to \texttt{"s"}\, B\, \texttt{"s"} \mid \texttt{"o"} \}
\end{aligned}
$$

Überprüfen Sie für die nachfolgenden Wörter, ob sie in der von der Grammatik G spezifizierten Sprache $\mathcal{L}(G)$ liegen. Falls ja, geben Sie eine Ableitung an. Falls nein, argumentieren Sie, warum nicht, und ändern Sie das Wort möglichst geringfügig ab, sodass es in der Sprache liegt.

(a) `risospi`

(b) `isisosisi`

(c) `risiopi`

Überlegen Sie weiters:

(d) Wie lautet das kürzeste Wort der Sprache?

(e) Ist es möglich, die Sprache $\mathcal{L}(G)$ auch durch einen endlichen Automaten zu beschreiben? Falls ja, geben Sie einen derartigen Automaten an. Falls nein, begründen Sie, warum das nicht geht.

Lösung

(a) Ja, das Wort liegt in der Sprache $\mathcal{L}(G)$.

$$
\begin{aligned}
A &\Rightarrow \texttt{"ri"}\, C\, \texttt{"pi"} \\
&\Rightarrow \texttt{"ris"}\, B\, \texttt{"spi"} \\
&\Rightarrow \texttt{"risospi"}
\end{aligned}
$$

(b) Ja, das Wort liegt in der Sprache $\mathcal{L}(G)$.

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow B \\ &\Rightarrow \texttt{"i"}\, C\, \texttt{"i"} \\ &\Rightarrow \texttt{"is"}\, B\, \texttt{"si"} \\ &\Rightarrow \texttt{"isi"}\, C\, \texttt{"isi"} \\ &\Rightarrow \texttt{"isis"}\, B\, \texttt{"sisi"} \\ &\Rightarrow \texttt{"isisosisi"} \end{aligned}$$

(c) Das Wort liegt nicht in der Sprache $\mathcal{L}(G)$. Da das Wort mit `ris` beginnt, könnte es nur durch eine Ableitung mit dem Beginn

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow \texttt{"ri"}\, C\, \texttt{"pi"} \\ &\Rightarrow \texttt{"ris"}\, B\, \texttt{"spi"} \end{aligned}$$

entstehen. Dann müsste das Wort aber mit `spi` statt mit `opi` enden.

Ein ähnliches Wort in der Sprache der Grammatik erhält man etwa durch folgende Ableitung:

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow \texttt{"ri"}\, C\, \texttt{"pi"} \\ &\Rightarrow \texttt{"ris"}\, B\, \texttt{"spi"} \\ &\Rightarrow \texttt{"risi"}\, C\, \texttt{"ispi"} \\ &\Rightarrow \texttt{"risioispi"} \end{aligned}$$

(d) Das kürzeste Wort der Sprache lautet `o`:

$$\begin{aligned} A &\Rightarrow B \\ &\Rightarrow \texttt{"o"} \end{aligned}$$

(e) Nein, die Sprache $\mathcal{L}(G)$ kann nicht durch einen endlichen Automaten beschrieben werden. Die Anzahl der `i`'s und `s`'s links und rechts vom `o` muss gleich groß sein, somit müsste sich der endliche Automat die Zahl der `i`'s und `s`'s in seinen Zuständen merken. Da diese Zahl nicht begrenzt werden kann, reicht eine endliche Zahl von Zuständen nicht aus.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben seien Adressen mit dem folgenden Aufbau:

- Jede Adresse beginnt mit dem Straßennamen. Dieser beginnt mit einem Großbuchstaben gefolgt von beliebig vielen Kleinbuchstaben. Jeder Straßenname endet mit „str.“.

- Anschließend folgt optional ein Leerzeichen und eine ein- oder zweistellige Hausnummer.

Sei $\mathcal{A}$ die Menge solcher Adressen.

(a) Spezifizieren Sie die Sprache $\mathcal{A}$ mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu strukturieren.

(b) Ist es möglich, die Sprache $\mathcal{A}$ auch durch einen endlichen Automaten zu beschreiben? Falls ja, geben Sie einen derartigen Automaten an. Falls nein, begründen Sie, warum das nicht geht.

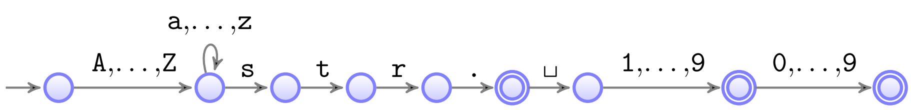
Lösung

Die Angabe ist mehrdeutig: Das Wort "optional" kann sich entweder nur auf das Leerzeichen beziehen oder auch auf die nachfolgende Hausnummer. Die nachfolgende Lösung wählt die zweite Interpretation, wir beziehen die Optionalität also auf das Leerzeichen *und* die Hausnummer. Weiters nehmen wir an, dass Null bzw. Zahlen mit führender Null nicht als Hausnummer auftreten dürfen.

(a) Die Adressensprache $\mathcal{A}$ wird durch die Grammatik $\langle N, T, P, \mathit{Adresse}\rangle$ beschrieben,wobei

$$
\begin{aligned}
N &= \{\mathit{Adresse}, \mathit{Straße}, \mathit{Hausnummer}, \mathit{Z1}, Z, \mathit{KB}, \mathit{GB}\},\\
T &= \{\texttt{"A"}, \dots, \texttt{"Z"}, \texttt{"a"}, \dots, \texttt{"z"}, \texttt{"0"}, \dots, \texttt{"9"}, \texttt{"␣"}, \texttt{"."}\},\\
P &= \{ \quad \mathit{Adresse} \to \mathit{Straße}\,[\,\texttt{"␣"}\ \mathit{Hausnummer}\,]\\
&\qquad \mathit{Straße} \to \mathit{GB}\,\{\mathit{KB}\}\,\texttt{"str."}\\
&\qquad \mathit{Hausnummer} \to \mathit{Z1}\,[\,Z\,]\\
&\qquad \mathit{Z1} \to \texttt{"1"} \mid \cdots \mid \texttt{"9"}\\
&\qquad Z \to \texttt{"0"} \mid \mathit{Z1}\\
&\qquad \mathit{KB} \to \texttt{"a"} \mid \cdots \mid \texttt{"z"}\\
&\qquad \mathit{GB} \to \texttt{"A"} \mid \cdots \mid \texttt{"Z"}\}
\end{aligned}
$$

(b) Die Sprache lässt sich durch einen endlichen Automaten beschreiben.



Aufgabe 3 (4 Punkte)

Einfache Dokumente im Textsatzsystem LaTeX beginnen mit den Zeilen

`\documentclass` *Optionen* `{`*Art*`}`
`\begin{document}`

Danach folgt der eigentliche Dokumenteninhalt und die Schlusszeile

```
\end{document}
```

Art ist ein einzelner Name, wobei ein Name eine nicht-leere Folge von Ziffern, Klein- und Großbuchstaben ist. Die *Optionen* können entweder ganz fehlen oder sie sind eine in eckigen Klammern eingeschlossene nicht-leere Folge von Namen, die durch Beistriche getrennt werden.
Der Dokumentinhalt ist eine möglicherweise leere Folge von Texten, Aufzählungen und punktierten Listen in beliebiger Reihenfolge. Ein Text ist eine nicht-leere Folge von Buchstaben, Ziffern, Leerzeichen, Kommas, Punkten und Doppelpunkten. Aufzählungen beginnen mit

```
\begin{enumerate}
```

und enden mit

```
\end{enumerate}
```

Dazwischen liegt eine nicht-leere Folge von Listeneinträgen. Ein Listeneintrag besteht aus dem Kommando `\item` gefolgt von Texten, Aufzählungen und punktierten Listen in beliebiger Reihenfolge. Ist der Listeneintrag leer, besteht er nur aus `\item`. Eine punktierte Liste ist genauso aufgebaut wie eine Aufzählung, außer dass sie mit `\begin{itemize}` beginnt und mit `\end{itemize}` endet.
Ein Beispiel für ein derartiges Dokument ist das folgende.

```
\documentclass[a4paper,12pt]{article}
\begin{document}
Ich bin ein Text, dem eine punktierte Liste folgt:
\begin{itemize}
\item Listeneintrag
\item Aufzählung innerhalb eines Listeneintrags:
      \begin{enumerate}
      \item Schon wieder ein Eintrag.
      \end{enumerate}
\end{itemize}
\end{document}
```

Das Beispieldokument ist von der Art `article` mit den beiden Optionen `a4paper` und `12pt`. Der Dokumenteninhalt besteht aus einem Text und einer punktierten Liste. Diese enthält zwei Einträge, wobei der erste aus einem Text und der zweite aus einem Text und einer Aufzählung besteht. Die Aufzählung enthält nur einen Listeneintrag.
Sei $\mathcal{L}$ die Menge all solcher einfachen LaTeX-Dokumente.

(a) Beschreiben Sie die Sprache $\mathcal{L}$ mit Hilfe einer kontextfreien Grammatik. Verwenden Sie EBNF-Notationen, um die Grammatik übersichtlich zu strukturieren.

(b) Handelt es sich bei $\mathcal{L}$ um eine reguläre Sprache, d.h., lässt sich diese Sprache im Prinzip auch durch einen (komplizierten) regulären Ausdruck beschreiben? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung

(a) $\langle N, T, P, \mathit{Dokument}\rangle$, wobei

$$
\begin{aligned}
N = \{\, & \mathit{Dokument}, \mathit{Optionen}, \mathit{Inhalt}, \mathit{Enumerate}, \mathit{Itemize},\\
& \mathit{Item}, \mathit{Name}, \mathit{NZeichen}, \mathit{Text}, \mathit{Zeichen}\,\},\\
T = \{ & \cdots \textit{alle Zeichen in den Produktionen zwischen Anführungszeichen} \cdots \},\\
P = \{ & \quad \mathit{Dokument} \to \texttt{"\textbackslash documentclass"}\ \texttt{[}\ \mathit{Optionen}\ \texttt{]}\ \texttt{"\{"}\ \mathit{Name}\ \texttt{"\}"}\\
& \qquad\qquad\qquad \texttt{"\textbackslash begin\{document\}"}\ \mathit{Inhalt}\ \texttt{"\textbackslash end\{document\}"},\\
& \quad \mathit{Optionen} \to \texttt{"["}\ \mathit{Name}\ \texttt{\{}\ \texttt{","}\ \mathit{Name}\ \texttt{\}}\ \texttt{"]"},\\
& \quad \mathit{Inhalt} \to \texttt{\{}\ \mathit{Text} \mid \mathit{Enumerate} \mid \mathit{Itemize}\ \texttt{\}},\\
& \quad \mathit{Enumerate} \to \texttt{"\textbackslash begin\{enumerate\}"}\ \mathit{Item}\ \texttt{\{}\ \mathit{Item}\ \texttt{\}}\ \texttt{"\textbackslash end\{enumerate\}"},\\
& \quad \mathit{Itemize} \to \texttt{"\textbackslash begin\{itemize\}"}\ \mathit{Item}\ \texttt{\{}\ \mathit{Item}\ \texttt{\}}\ \texttt{"\textbackslash end\{itemize\}"},\\
& \quad \mathit{Item} \to \texttt{"\textbackslash item"}\ \mathit{Inhalt},\\
& \quad \mathit{Name} \to \mathit{NZeichen}\ \texttt{\{}\ \mathit{NZeichen}\ \texttt{\}},\\
& \quad \mathit{NZeichen} \to \texttt{"a"} \mid \cdots \mid \texttt{"z"} \mid \texttt{"A"} \mid \cdots \mid \texttt{"Z"} \mid \texttt{"0"} \mid \cdots \mid \texttt{"9"},\\
& \quad \mathit{Text} \to \mathit{Zeichen}\ \texttt{\{}\ \mathit{Zeichen}\ \texttt{\}},\\
& \quad \mathit{Zeichen} \to \mathit{NZeichen} \mid \texttt{" "} \mid \texttt{","} \mid \texttt{"."} \mid \texttt{":"}\ \}.
\end{aligned}
$$

(b) Nein, $\mathcal{L}$ ist keine reguläre Sprache, sie lässt sich daher weder durch einen endlichen Automaten noch durch einen regulären Ausdruck beschreiben. (Aus der Vorlesung wissen wir, dass die regulären Sprachen identisch mit den durch reguläre Ausdrücke bzw. endliche Automaten beschreibbaren Sprachen sind.)

Intuitiv lässt sich das damit begründen, dass die Zeichenfolgen `"\begin{itemize}"` und `"\end{itemize}"` wie Klammern immer paarweise in der selben Anzahl auftreten müssen, ebenso `"\begin{enumerate}"` und `"\end{enumerate}"`. Ein Automat müsste sich die Anzahl der offenen `begin`s sowie die Reihenfolge von `itemize` und `enumerate` durch Wechsel in jeweils neue Zustände merken. Da die Schachtelungstiefe beliebig groß werden kann, ein endlicher Automat aber nur endlich viele Zustände besitzt, muss sich sich bei der Abarbeitung einer langen Folge von `begin`'s daher irgendwann ein Zustand wiederholen. Verwendet der Automat beispielsweise den Zustand, der nach einem `begin` erreicht wurde, auch für drei `begin`s, dann kann der Automat ungerade Anzahlen von `begin`s nicht unterscheiden; insbesondere kann er nicht kontrollieren, ob die Anzahl der `end`s übereinstimmt.

Für einen formalen Beweis kann man das sogenannte Pumping Lemma für reguläre Sprachen verwenden, das in der Lehrveranstaltung *Theoretische Informatik und Logik* besprochen werden wird.

Aufgabe 4 **(4 Punkte)**

In Büchern über formale Sprachen ist folgende Definition zu finden:

> Eine *reguläre Grammatik* wird durch ein 4-Tupel $G = \langle V, T, P, S\rangle$ festgelegt, wobei

- V und T endliche, disjunkte Mengen von Symbolen sind ($V \cap T = \{\}$),
- S ein Symbol aus V ist ($S \in V$) und
- $P \subseteq V \times (T \cdot V \cup \{\varepsilon\})$ eine endliche Menge von Paaren ist.

Die Elemente von P werden Produktionen genannt; statt $(x, y) \in P$ wird auch $x \to y$ geschrieben. Die Notation $x \to y_1 \mid \cdots \mid y_n$ ist eine Abkürzung für die Produktionen $x \to y_1, \ldots, x \to y_n$.

Das Wort $u\,y\,v$ ist aus dem Wort $u\,x\,v$ in einem Schritt ableitbar, geschrieben $u\,x\,v \Rightarrow u\,y\,v$, wenn $x \to y$ gilt. Die von G generierte Sprache $\mathcal{L}(G)$ ist definiert als die Menge $\{\, w \in T^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w \,\}$, wobei $\overset{*}{\Rightarrow}$ den reflexiven und transitiven Abschluss von $\Rightarrow$ bezeichnet.[1]

Geben Sie an, welche der folgenden Tupeln eine reguläre Grammatik gemäß der obigen Definition darstellt. Begründen Sie Ihre Antwort, falls es sich um keine reguläre Grammatik handelt. Entspricht das Tupel der Definition, geben Sie die Sprache an, die durch die Grammatik generiert wird.

(a) $\langle \{\mathtt{X}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{X} \to \mathtt{aXb} \mid \varepsilon\}, \mathtt{X} \rangle$

(b) $\langle \{\mathtt{X}, \mathtt{Y}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{X} \to \mathtt{aX} \mid \mathtt{bY} \mid \varepsilon, \mathtt{Y} \to \mathtt{bY}\}, \mathtt{X} \rangle$

(c) $\langle \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{X}, \mathtt{Y}\}, \{\mathtt{a} \to \mathtt{Xa} \mid \mathtt{Yb} \mid \varepsilon, \mathtt{b} \to \mathtt{Yb}\}, \mathtt{b} \rangle$

(d) $\langle \{\mathtt{X}, \mathtt{Y}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, \{\mathtt{X} \to \mathtt{Xa} \mid \mathtt{Yb} \mid \varepsilon, \mathtt{Y} \to \mathtt{Yb} \mid \varepsilon\}, \mathtt{X} \rangle$

Lösung

(a) Ist keine reguläre Grammatik, da die rechte Seite der ersten Produktion, `aXb`, weder in der Menge $T \cdot V$ liegt noch das Leerwort ist, da sie mit dem Terminalsymbol `b` endet.

(b) Ist eine reguläre Grammatik, die die Sprache $\{\mathtt{a}\}^*$ generiert.

(c) Ist eine reguläre Grammatik, die die Sprache $\{\}$ generiert.

(d) Ist keine reguläre Grammatik, da die rechte Seite der ersten Produktion, `Xa`, weder in der Menge $T \cdot V$ liegt noch das Leerwort ist, da sie mit dem Nonterminal `X` beginnt.

[1] Das heißt, dass $\overset{*}{\Rightarrow}$ die kleinste Relation mit folgenden Eigenschaften ist:

- Aus $u \Rightarrow v$ folgt $u \overset{*}{\Rightarrow} v$.
- Es gilt $u \overset{*}{\Rightarrow} u$ für alle Wörter $u \in T^*$.
- Aus $u \overset{*}{\Rightarrow} v$ und $v \overset{*}{\Rightarrow} w$ folgt $u \overset{*}{\Rightarrow} w$.

Anschaulich gesprochen steht $\overset{*}{\Rightarrow}$ für die Ableitbarkeit in beliebig vielen Schritten.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Wählen Sie geeignete Prädikaten- und Konstantensymbole und übersetzen Sie die folgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln.

(a) Die Dame ist eine Schachfigur.

(b) Es gibt keine Schachfigur.

(c) Es gibt eine Schachfigur, die schwarz aber nicht weiß ist.

(d) Alle Schachfiguren sind schwarz.

(e) Jede Schachfigur ist entweder schwarz oder weiß.

Lösung

Seien *Schachfigur*/1, *Schwarz*/1 und *Weiß*/1 Prädikatensymbole sowie *dame* ein Konstantensymbol mit folgender Bedeutung:

$\mathit{Schachfigur}(x)$	$\ldots$ x ist eine Schachfigur	dame	$\ldots$ Dame
$\mathit{Schwarz}(x)$	$\ldots$ x ist schwarz		
$\mathit{Weiß}(x)$	$\ldots$ x ist weiß		

(a) $\mathit{Schachfigur}(\mathit{dame})$

(b) $\neg\exists x \mathit{Schachfigur}(x)$

(c) $\exists x(\mathit{Schachfigur}(x) \wedge \mathit{Schwarz}(x) \wedge \neg \mathit{Weiß}(x))$

(d) $\forall x(\mathit{Schachfigur}(x) \supset \mathit{Schwarz}(x))$

(e) $\forall x(\mathit{Schachfigur}(x) \supset (\mathit{Schwarz}(x) \not\equiv \mathit{Weiß}(x)))$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Seien *Spielt*, *Kind*, *Lustig* und *Spiel* Prädikatensymbole und *kakerlak* und *geistesblitz* Konstantensymbole mit folgender Bedeutung:

$\mathit{Spielt}(x, y)$	$\ldots$ x spielt y	$\mathit{Spiel}(x)$	$\ldots$ x ist ein Spiel
$\mathit{Kind}(x)$	$\ldots$ x ist ein Kind	$\mathit{kakerlak}$	$\ldots$ Kakerlak
$\mathit{Lustig}(x)$	$\ldots$ x ist lustig	$\mathit{geistesblitz}$	$\ldots$ Geistesblitz

Verwenden Sie diese Symbole, um die beiden nachfolgenden Sätze in prädikatenlogische Formeln zu übersetzen.

(a) Es gibt lustige Kinder, die dann und nur dann Kakerlak spielen, wenn sie auch Geistesblitz spielen.

(b) Es gibt ein lustiges Spiel, das von allen Kindern gespielt wird.

Sei weiters folgende Interpretation I gegeben:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{U} &= \{\text{Yasin}, \text{Marie}, \text{Heinz}, \text{Thomas}, \text{Stefan}, \text{Uno}, \text{Obstgarten},\\
&\qquad \text{Kakerlak}, \text{Geistesblitz}, \text{Krokodoc}\}\\
I(\mathit{Kind}) &= \{\text{Yasin}, \text{Heinz}, \text{Thomas}, \text{Stefan}\}\\
I(\mathit{Lustig}) &= \{\text{Yasin}, \text{Uno}, \text{Kakerlak}, \text{Geistesblitz}\}\\
I(\mathit{Spiel}) &= \{\text{Kakerlak}, \text{Geistesblitz}, \text{Uno}\}\\
I(\mathit{Spielt}) &= \{(\text{Marie}, \text{Uno}), (\text{Yasin}, \text{Uno}), (\text{Yasin}, \text{Kakerlak}),\\
&\qquad (\text{Thomas}, \text{Kakerlak}), (\text{Thomas}, \text{Uno}), (\text{Thomas}, \text{Obstgarten}),\\
&\qquad (\text{Heinz}, \text{Kakerlak}), (\text{Heinz}, \text{Krokodoc}), (\text{Heinz}, \text{Obstgarten}),\\
&\qquad (\text{Stefan}, \text{Uno}), (\text{Stefan}, \text{Kakerlak})\}\\
I(\mathit{uno}) &= \text{Uno} \qquad I(\mathit{krokodoc}) = \text{Krokodoc}
\end{aligned}
$$

Übersetzen Sie die nachfolgenden Formeln in natürliche Sprache. Geben Sie an, ob die Formeln in der Interpretation I wahr oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Antwort; es ist keine formale Auswertung erforderlich.

(c) $\exists x \exists y\, (\mathit{Kind}(x) \land \mathit{Spiel}(y) \land \mathit{Spielt}(y, x))$

(d) $\forall x\, (\mathit{Kind}(x) \supset \mathit{Spielt}(x, \mathit{kakerlak}))$

(e) $\exists x \forall y\, ((\mathit{Spiel}(y) \land \mathit{Lustig}(y)) \supset \mathit{Spielt}(x, y))$

(f) $\forall x\, (\mathit{Spielt}(x, \mathit{uno}) \not\equiv \mathit{Spielt}(x, \mathit{krokodoc}))$

Lösung

(a) $\exists x(\mathit{Kind}(x) \land \mathit{Lustig}(x) \land (\mathit{Spielt}(x, \mathit{kakerlak}) \equiv \mathit{Spielt}(x, \mathit{geistesblitz})))$

(b) $\exists y\, (\mathit{Spiel}(y) \land \mathit{Lustig}(y) \land \forall x\, (\mathit{Kind}(x) \supset \mathit{Spielt}(x, y)))$

(c) Übersetzung: Es gibt ein Kind, das von einem Spiel gespielt wird.
Oder: Es gibt ein Spiel, das ein Kind spielt.
Oder: Es gibt mindestens ein Kind und ein Spiel, sodass das Spiel das Kind spielt.

Diese Aussage ist falsch. Es gibt kein Tupel in $I(\mathit{Spielt})$, bei dem auf der linken Seite ein Element aus $I(\mathit{Spiel})$ und auf der rechten Seite ein Element aus $I(\mathit{Kind})$ steht.

(d) Übersetzung: Alle Kinder spielen Kakerlak.

Diese Aussage ist richtig. Es gibt die Kinder Yasin, Heinz, Thomas und Stefan. Zu jedem davon gibt es ein Tupel $(x, \text{Kakerlak})$ in der Relation *Spielt*, wobei x für den Namen des Kindes steht.

Falls Sie Marie als Gegenbeispiel gefunden haben: Marie spielt zwar nicht Kakerlak, sie ist aber auch kein Kind.

(e) Übersetzung: Es gibt etwas/jemanden, das alle lustigen Spiele spielt.

Diese Aussage ist falsch. Geistesblitz ist lustig und ein Spiel, es wird aber von niemandem gespielt.

(f) Übersetzung: Alles spielt entweder Krokodoc oder Uno (aber nicht beides).

Diese Aussage ist falsch, da beispielsweise $(\text{Krokodoc}, \text{Krokodoc}) \notin I(\mathit{Spielt})$ und $(\text{Krokodoc}, \text{Uno}) \notin I(\mathit{Spielt})$.

Aufgabe 7 (2 Punkte)

Seien $P/1$ und $S/1$ einstellige Prädikatensymbole.

(a) Zeigen Sie, dass die Formeln $\forall x\,(P(x) \supset S(x))$ und $\forall x\,(P(x) \wedge S(x))$ nicht äquivalent sind. Geben Sie zu diesem Zweck eine Interpretation I an, in der die eine Formel wahr und die andere falsch ist.

(b) Wählen Sie für die Prädikatensymbole P und S Begriffe in natürlicher Sprache. Übersetzen Sie die beiden Formeln mit Hilfe dieser Begriffe in deutschsprachige Sätze.

Lösung

(a) Wir betrachten eine Interpretation I mit Universum $\mathcal{U} = \{a\}$ und $I(P) = I(S) = \emptyset$. Offenbar erfüllt I die Formel $\forall x\,(P(x) \supset S(x))$, während I die Formel $\forall x\,(P(x) \wedge S(x))$ nicht erfüllt, da a nicht das Prädikat $I(P)$ erfüllt. Es folgt nun unmittelbar, dass die beiden genannten Formeln nicht äquivalent sind.

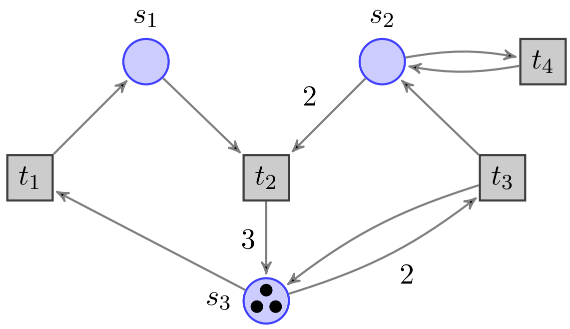
(b) Die Formel $\forall x\,(P(x) \supset S(x))$ bedeutet „Alle Objekte mit Eigenschaft P haben Eigenschaft S“. Die Formel $\forall x\,(P(x) \wedge S(x))$ bedeutet „Alle Objekte haben Eigenschaft P und S“. Wählen wir für P und S folgende Bedeutungen:

$$P(x) \ \ldots \ x \text{ ist ein Engel}$$
$$S(x) \ \ldots \ x \text{ hat Flügel}$$

Dann bedeutet $\forall x\,(P(x) \supset S(x))$, dass alle Engel Flügel haben, während $\forall x\,(P(x) \wedge S(x))$ bedeutet, dass alles ein Engel ist und Flügel hat.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

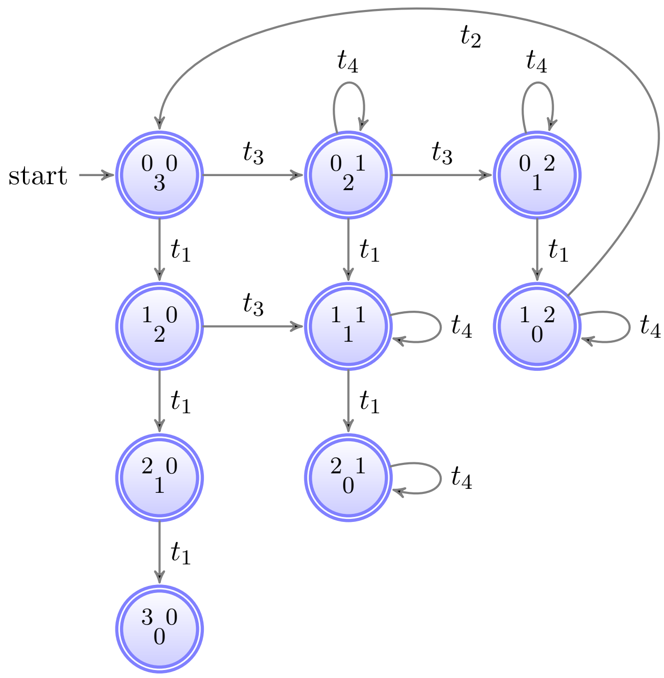
Gegeben sei das folgende Petri-Netz mit Anfangsmarkierung.



Fassen Sie die Bezeichnungen der Transitionen als Alphabet auf und die Markierungen (also die jeweiligen Belegungen der Stellen mit Marken) als Zustände. Beschreiben Sie die möglichen Reihenfolgen, in der die Transitionen feuern und die Markierungen auftreten können, mit Hilfe eines endlichen Automaten. Der Automat soll also Wörter wie $t_1 t_3 t_4$ akzeptieren, weil die Transitionen in dieser Reihenfolge feuern können, nicht aber $t_1 t_2$.

Lösung

Die Abläufe im Petrinetz lassen sich durch einen Automaten mit (in diesem Fall) endlich vielen Zuständen beschreiben. Die Markierungen bilden die Zustände, die Transitionen das Alphabet. Erhält man aus einer Markierung m durch Feuern einer Transition t eine Markierung m', dann gibt es einen Übergang beschriftet mit t vom Zustand für m zu jenem für m'.
Wir stellen jede Markierung durch drei Zahlen ${}^{n_1}{}_{n_3}{}^{n_2}$ dar, wobei n_i die Anzahl der Marken in der Stelle s_i angibt. Die endlichen Reihenfolgen, in denen die Transitionen feuern können, entsprechen der Sprache des folgenden Automaten.



Aufgabe 9 **(4 Punkte)**

Leiterplatten sind Kunststoffplatten mit leitenden Bahnen (meist aus Kupfer), auf die elektronische Bauteile gelötet werden. Beispielsweise sind Motherboards von Computern solche mit diversen Bauteilen bestückte Leiterplatten.

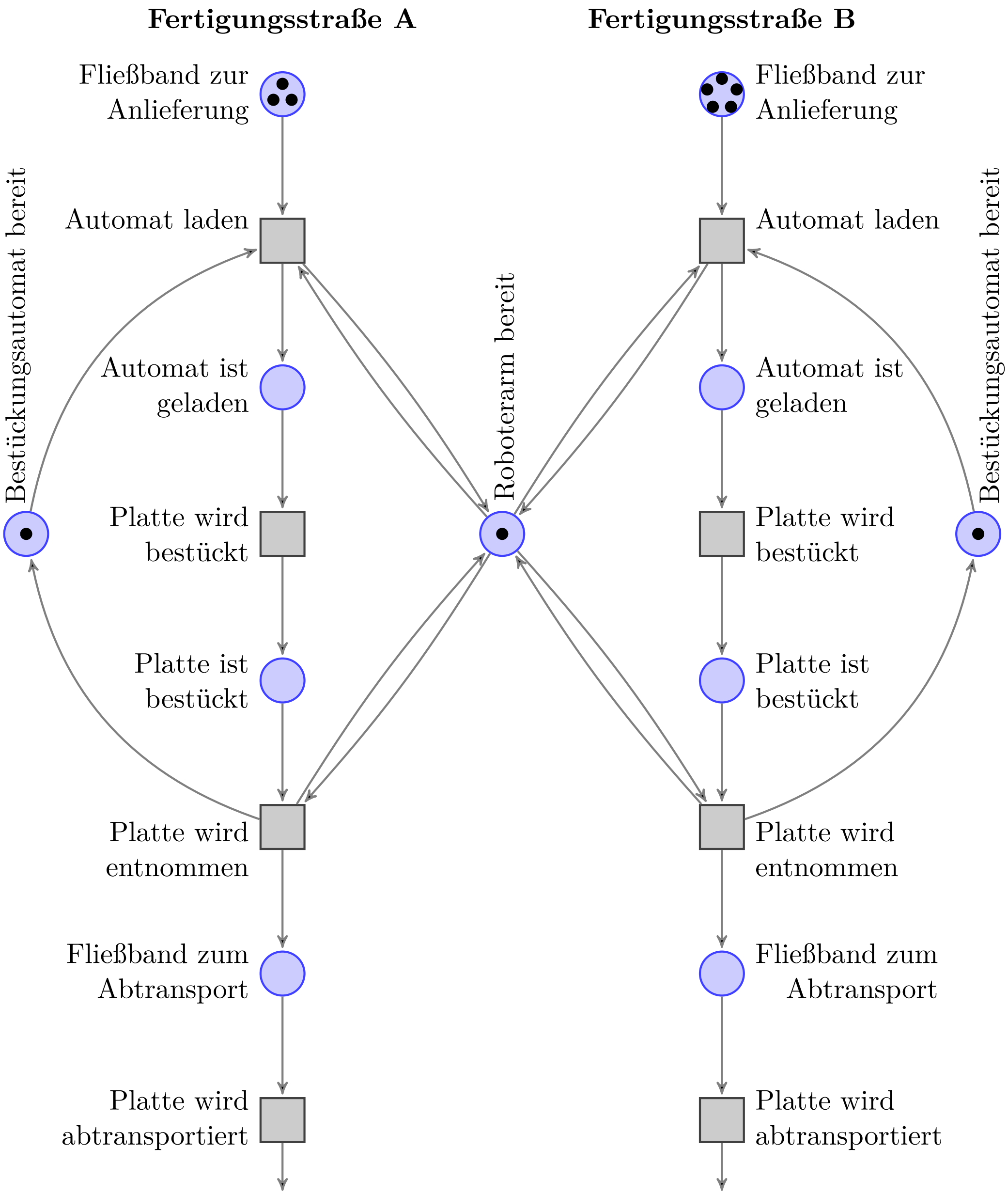
In einer Leiterplattenfabrik werden zwei unterschiedliche Leiterplatten gefertigt, Typ A und Typ B. Die Leiterplatten vom Typ A werden von einem Fließband herangebracht, in einen Bestückungsautomaten gelegt, von diesem mit den elektronischen Bauteilen bestückt und danach wieder auf ein weiteres Fließband entladen, das die fertige Leiterplatte abtransportiert. Dasselbe passiert mit den Leiterplatten vom Typ B: Auch hier gibt es ein Fließband zum Anliefern der Platten, einen Bestückungsautomaten und ein Fließband zum Abtransport. Die Bestückungsautomaten können zu jedem Zeitpunkt immer nur eine Platte bearbeiten.

Für das Be- und Entladen der Bestückungsautomaten vom bzw. zum jeweiligen Fließband gibt es einen einzelnen Roboterarm, der diese vier Tätigkeiten – Automat für Typ A/Typ B beladen/entladen – durchführt. Beim Bestücken einer Leiterplatte durch den Automaten wird der Roboter nicht benötigt, er kann sich währenddessen einer anderen Tätigkeit widmen.[2]

Modellieren Sie dieses System mit Hilfe eines Petri-Netzes. Geben Sie den Stellen und Transitionen geeignete Bezeichnungen, die ihre Rolle beschreiben. Nehmen Sie an, dass anfänglich 3 Platten des Typs A und 5 Platten des Typs B auf Bestückung warten.

[2] Inspiriert von der Vorlesung „Automatisierungsprojekte“ der Hochschule Karlsruhe.

Lösung


Fertigungsstraße A
Fertigungsstraße B
Fließband zur Anlieferung
Automat laden
Automat ist geladen
Platte wird bestückt
Platte ist bestückt
Platte wird entnommen
Fließband zum Abtransport
Platte wird abtransportiert
Bestückungsautomat bereit
Roboterarm bereit
Fließband zur Anlieferung
Automat laden
Automat ist geladen
Platte wird bestückt
Platte ist bestückt
Platte wird entnommen
Fließband zum Abtransport
Platte wird abtransportiert
Bestückungsautomat bereit