Der Fragepool für die VO Prüfung ADM Inf. Zur VO Pruefung kommt eine Auswahl aus den folgenden Fragen. (Nicht jede der folgenden Punkte wird in jeder Test-Gruppe vorkommen.) Irrtümer etc vorbehalten.

1 Aussagenlogik

Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig (d.h. für beliebige mathematische Aussagen φ, ψ)

Zur Erinnerung: $\varphi \to \psi$ heißt "wenn dann" bzw "impliziert"; $\leftrightarrow$ heißt "gdw" oder "äquivalent", $\wedge$ heißt "und", $\vee$ "oder" und $\neg$ "nicht".

1. Wenn φ gilt und $\varphi \to \psi$, dann gilt ψ.
2. $\big((\varphi \wedge (\varphi \to \psi)\big) \to \psi$.
3. Wenn φ gilt, dann: $\varphi \to \psi$ gdw ψ.
4. $\varphi \to \big((\varphi \to \psi) \leftrightarrow \psi\big)$.
5. Wenn ψ gilt, dann: $\varphi \to \psi$ gdw ψ.
6. $\psi \to \big((\varphi \to \psi) \leftrightarrow \psi\big)$.
7. Wenn φ gilt, dann: $\varphi \to \psi$ gdw φ.
8. $\varphi \to \big((\varphi \to \psi) \leftrightarrow \varphi\big)$.
9. Wenn ψ nicht gilt, dann ist $\varphi \to \psi$ äquivalent zu $\neg\psi$.
10. $\neg\psi \to \big((\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg\psi\big)$.
11. Wenn ψ nicht gilt, dann ist $\varphi \to \psi$ äquivalent zu $\neg\varphi$.
12. $\neg\psi \to \big((\varphi \to \psi) \leftrightarrow \neg\varphi\big)$.
13. $\varphi \to \neg\varphi$
14. $\varphi \to \neg\varphi$ ist äquivalent zu φ
15. $(\varphi \to \neg\varphi) \leftrightarrow \varphi$
16. $\varphi \to \neg\varphi$ ist äquivalent zu $\neg\varphi$
17. $(\varphi \to \neg\varphi) \leftrightarrow \neg\varphi$
18. $\varphi \to \psi$ impliziert $\neg\varphi \to \neg\psi$.
19. $(\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$.
20. $\varphi \to \psi$ impliziert $\neg\psi \to \neg\varphi$.
21. $(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$.
22. $\varphi \leftrightarrow \psi$ gdw $\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$.
23. $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$.
24. $\varphi \to \psi$ gdw $\neg\varphi \to \neg\psi$.
25. $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \to \neg\psi)$.
26. $\varphi \to \psi$ gdw $\neg\psi \to \neg\varphi$.
27. $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\psi \to \neg\varphi)$.
28. $\varphi \leftrightarrow \psi$ gdw $\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi$.
29. $(\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi)$.
30. $(\varphi \wedge \neg\varphi) \leftrightarrow \varphi$
31. $(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \varphi$
32. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$
33. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi))$
34. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \leftrightarrow ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$
35. $(\varphi \leftrightarrow \psi) \to ((\varphi \to \psi) \vee (\psi \to \varphi))$
36. etc

2 Prädikatenlogik

Welche der folgenden Aussagen sind allgemein gültig, d.h. für beliebige mathematische Aussagen φ, ψ, und für eine beliebige (möglicherweise leere) Menge A.

Zur Erinnerung: $\varphi \to \psi$ heißt "wenn dann" bzw "impliziert"; $\leftrightarrow$ heißt "gdw" oder "äquivalent", $\wedge$ heißt "und", $\vee$ "oder" und $\neg$ "nicht", $\exists$ heißt 'es gibt" und $\forall$ heißt 'für alle".

1. $\exists x \in A\, \varphi(x)$ impliziert $\forall x \in A\, \varphi(x)$
2. $\forall x \in A\, \varphi(x)$ impliziert $\exists x \in A\, \varphi(x)$
3. $A \neq \emptyset$ und $\exists x \in A\, \varphi(x)$ impliziert $\forall x \in A\, \varphi(x)$
4. $A \neq \emptyset$ und $\forall x \in A\, \varphi(x)$ impliziert $\exists x \in A\, \varphi(x)$
5. $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \notin A)\varphi(x)$.
6. $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\exists x \in A)\neg\varphi(x)$.
7. $\neg(\forall x \in A)\varphi(x)$ impliziert $(\forall x \notin A)\neg\varphi(x)$.
8. etc

Und dieselben Fragen nochmals für "gdw" statt "impliziert".

3 Mengenschreibweise

Welche der folgenden Aussagen gilt: Dabei bezeichnen $\{a, b, \dots\}$ eine Menge, und $(a, b, \dots)$ eine Folge.

1. $(2, 3) = (3, 2)$
2. $\{2, 3\} = \{3, 2\}$
3. $\{2, 3, 3\} = \{2, 3\}$
4. $(2, 3, 3) = (2, 3)$
5. etc.

4 De Morgan Regeln

Seien A, B Teilmengen einer Menge X. Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein (d.h., für alle solche Mengen):

1. $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$
2. $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
3. $X \setminus (A \cup B) = A \cap B$
4. $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = A \cap B$
5. $X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B)) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$
6. $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$
7. $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus ((X \setminus A) \cup (X \setminus B))$

5 Komplexe Zahlen: Kartesisch und polar

Schreibe die folgenden Zahlen in Polarschreibweise $re^{i\phi}$:

1. $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$
2. $\frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{2}}i$
3. etc

Schreibe die folgenden Zahlen 'kartesisch", d.h. berechne Real- und Imaginärteil:

1. $2e^{\frac{\pi}{4}i}$
2. $3e^{\frac{3\pi}{2}i}$
3. etc

6 Komplexe Zahlen: Grundrechnungsarten

Berechne

1. $\frac{13+0i}{2+3i}$
2. $(3+2i)\cdot(-3-3i)$
3. $\frac{14-8i}{2-4i}$
4. $\frac{0+13i}{3+2i}$
5. $(-3+2i)\cdot(-4+2i)$
6. etc

7 Komplexe Zahlen: Einheitswurzeln

Für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$:

Schreibe alle n-ten Einheitswurzeln in Polar-Schreibweise $e^{i\phi}$. Betrachte alle Einheitswurzeln mit nichtnegativem Imaginärteil. Was ist ihr Produkt? Dasselbe für nichtnegativen Realteil.

Für $n = 1, 2, 4, 8$. Schreibe alle n-ten Einheitswurzeln in kartesischer Schreibweise $a + ib$. Betrachte alle Einheitswurzeln mit nichtnegativem Imaginärteil. Was ist ihre Summe? Dasselbe für nichtnegativen Realteil.

8 Injektiv, Bijektiv, surjektiv

Welche der Folgenden Funktionen ist injektiv, surjektiv oder bijektiv.

(D.h.: Wenn zB gefragt ist: Ist $F : A \times A \to A$ $(x, y) \mapsto x$ injektiv, für A Menge, dann ist gemeint: Ist es wahr dass f für beliebige A injektiv ist?)

1. $f : A \to A \times A$ $a \mapsto (a, a)$ für eine Menge A.
2. $f : A \to A \times B$ $a \mapsto (a, b_0)$ für A, B Mengen und ein fixes $b_0 \in B$.
3. $f : A \to A$ $x \mapsto x$ für eine Menge A.
4. $f : A \times B \to A$ $(a, b) \mapsto a$ für A, B Mengen.
5. $f : A \times B \to B$ $(a, b) \mapsto b$ für A, B Mengen.
6. $f : G \to G$ $a \mapsto a \circ b_0$ für eine Gruppe G und fixes $b_0 \in G$

7. $f : R \to R \ a \mapsto a \cdot b_0$ für einen Ring R und fixes $b_0 \in R$.
8. $f : R \to R \ a \mapsto a + b_0$ für einen Ring R und fixes $b_0 \in R$.
9. $f : K \to K \ a \mapsto a \cdot b_0$ für einen Körper K und fixes $b_0 \neq 0$ in K.
10. $f : V \to V \ v \mapsto \lambda v$ für einen Vektorraum V über K und $\lambda \neq 0$ in K.
11. $f : V \to V \ v \mapsto v + w_0$ für einen Vektorraum V und fixes $w_0 \in V$.
12. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ x \mapsto x^2$
13. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ x \mapsto x^2$
14. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \ x \mapsto 23x^{33} - 18x^7 + 12i$

    (Hinweis: Für surjektiv: Schreibe $f(x) = z$ als $f(x) - z = 0$ und verwende den Fundamentalsatz der Algebra. Für injektiv: Betrachte für $z \neq 0$ das Polynom $g(x) := f(x + z) - f(x)$. Zeige $\deg(g) = \deg(f) - 1$ und verwende ebenfalls den Fundamentalsatz.)
15. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ x \mapsto x + 1$
16. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ x \mapsto x - 1$ wenn $x > 1$, und $f(0) = 0$
17. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \ x \mapsto x + 1$
18. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \ x \mapsto x - 1$

9 Nullstellen von Polynomen und Fundamentalsatz der Algebra

Welche der folgenden Aussagen ist richtig:

1. Jedes komplexe Polynom $f(X) \in \mathbb{C}[X]$ von Grad ≥ 1 hat eine komplexe Nullstelle.
2. Jedes reelle Polynom $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ von Grad ≥ 1 hat eine reelle Nullstelle.
3. Jedes reelle Polynom $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ von Grad ≥ 3 hat eine reelle Nullstelle.
4. Jedes reelle Polynom $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ von Grad 3 hat eine reelle Nullstelle.
5. Jedes reelle Polynom $f(X) \in \mathbb{R}[X]$ von Grad 5 hat eine reelle Nullstelle.
6. Jedes Polynom $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ (mit ganzzahligen Koeffizienten) von Grad 3 hat eine ganzzahlige Nullstelle.
7. Jedes rationale Polynom $f(X) \in \mathbb{Q}[X]$ von Grad 3 hat eine rationale Nullstelle.
8. Jedes Polynom $f(X) \in \mathbb{Z}_2[X]$ von Grad 2 hat eine Nullstelle in $\mathbb{Z}_2[X]$. (D.h.: Jede Funktion $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ der Form $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_2$, mit $a_i \in \mathbb{Z}_2$ und $a_2 \neq 0$.)

9. Jedes Polynom $f(X) \in \mathbb{Z}_2[X]$ von Grad 3 hat eine Nullstelle in $\mathbb{Z}_2[X]$. (D.h.: Jede Funktion $f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ der Form $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_2$, mit $a_i \in \mathbb{Z}_2$ und $a_2 \neq 0$.)

10. Für jeden Körper K, jedes $n > 0$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ in K gibt es ein Polynom $f \in K[X]$ von Grad n das die Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ hat. (D.h.: Eine Funktion $f : K \to K$ der Form $f(x) = a_nx^n + \cdots a_1x + a_2$, mit $a_i \in K$ und $a_n \neq 0$, und $f(\lambda_i) = 0$.)

11. Wenn $f(X) \in \mathbb{Z}_2[X]$ Nullstelle $\overline{1}$ hat, dann können wir $f(X)$ faktorisieren als $f(X) = (X - \overline{1})g(X)$, mit $g(X) \in \mathbb{Z}_2[X]$.

10 Injektiv, Bijektiv, surjektiv 2

Welche der folgenden Aussagen gilt allgemein, für X Y eines von injektiv, surjektiv, bijektiv:

1. Wenn $f : A \to A$ X ist, dann ist f Y (für eine beliebige Menge A).

2. Wenn $f : A \to A$ X ist, dann ist f Y (für eine beliebige endliche Menge A).

3. Wenn $f : V \to V$ X ist, dann ist f Y (für einen beliebigen Vektorraum V und eine beliebige Funktion $V \to V$).

4. Wenn $f : V \to V$ X ist, dann ist f Y (für einen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorraum V und eine beliebige Funktion $V \to V$).

5. Wenn $f : V \to V$ X ist, dann ist f Y (für einen beliebigen Vektorraum V und eine beliebige lineare Funktion $V \to V$).

6. Wenn $f : V \to V$ X ist, dann ist f Y (für einen beliebigen endlich-dimensionalen Vektorraum V und eine beliebige lineare Funktion $V \to V$).

7. Wenn $f : G \to G$ X ist, dann ist f Y (für eine beliebige Gruppe G und einen Gruppenhomomorphismus f).

8. Jeder Ringhomomorphismus ist injektiv.

9. Jeder Körperhomomorphismus ist injektiv.

10. Jeder Vektorraum-Homomorphismus ist injektiv.

11. Eine Gruppen-Einbettung $f : G \to G$ von G in sich selbst, für eine beliebige Gruppe G, ist immer eine Bijektion.

12. Eine Gruppen-Einbettung (inj. Gruppenhomomorphismus) $f : G \to G$ von G in sich selbst, für eine endliche Gruppe G, ist immer bijektiv.

13. Eine Vektorraum-Einbettung (inj. lineare Abbildung) $f : V \to V$, für einen beliebigen Vektorraums f, ist immer bijektiv.

14. Eine Vektorraum-Einbettung (inj. lineare Abbildung) $f : V \to V$, für einen endlich-dimensionalen Vektorraum f, ist immer bijektiv.
15. Die Verknüpfung einer injektiven Funktion f mit einer injektiven Funktion g ist injektiv.
16. Die Verknüpfung $g \circ f$ einer injektiven Funktion f mit einer surjektiven Funktion g ist injektiv.
17. Die Verknüpfung $g \circ f$ einer injektiven Funktion f mit einer bijektiven Funktion g ist injektiv.
18. Die Verknüpfung $g \circ f$ einer injektiven Funktion f mit einer bijektiven Funktion g ist bijektiv.
19. etc

11 Gruppen

Welche Aussagen bzw Gleichungen gelten in allen Gruppen $(G, \circ)$, wobei e das neutrale Element bezeichnet, und a^{-1} das Inverse zu a: Welche gelten in allen kommuttiven Gruppen?

1. $(a \circ b)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1}$
2. $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$
3. $(a \circ b \circ c)^{-1} = a^{-1} \circ (b \circ c)^{-1}$
4. $(a \circ b \circ c)^{-1} = a^{-1} \circ (c \circ b)^{-1}$
5. $(a \circ b \circ c)^{-1} = (b \circ c)^{-1} \circ a^{-1}$
6. $(a \circ b \circ c)^{-1} = (c \circ b)^{-1} \circ a^{-1}$
7. $(a \circ b \circ c)^{-1} = c^{-1} \circ b^{-1} \circ a^{-1}$
8. $(a \circ b \circ c)^{-1} = a^{-1} \circ b^{-1} \circ c^{-1}$
9. $(a \circ b \circ c)^{-1} = a^{-1} \circ c^{-1} \circ b^{-1}$
10. $a \circ b = c \circ a$ impliziert $b = c$
11. $a \circ b = a \circ c$ impliziert $b = c$
12. $c \circ a = b \circ a$ impliziert $b = c$
13. $a \circ e = e$ impliziert $a = e$.
14. $b^{-1} \circ a^{-1} \circ a \circ b = e$
15. $a \neq b$ impliziert $a \circ c \neq b \circ c$.
16. $(a \circ b) \circ (a \circ b) = a \circ (b \circ a) \circ b$
17. $a \circ a \circ b \circ a^{-1} \circ b^{-1} \circ a^{-1} \circ b = b$
18. etc

12 S_n: Zweizeilendarstellung in Zyklendarstellung

Stelle die folgenden Permutationen in Zyklendarstellung dar. Ist die Permuatation gerade oder ungerade? Schreibe das Inverse der Permutation in Zweizeilendarstellung an.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 4 & 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
4. etc

13 S_n: Zyklendarstellung in Zweizeilendarstellung

Stellen Sie in Zweizeilendarstellung dar: Ist die Permutation gerade oder ungerade? Stellen Sie das Inverse in Zyklendarstellung dar.

1. (1)(256)(34)
2. (14)(23)
3. etc

14 S_n: Zyklendarstellung in Zweizeilendarstellung 2

Gegeben ein Produkt von Zyklen (nicht notwendigerweise disjunkt, d.h. nicht notwendigerweise eine Zyklendarstellung). Dabei heißt $a \circ b$ dass zuerst die Permutation b und danach a angewendet wird. Ist die Permutation gerade oder ungerade? Gib die Zweizeilen- und die Zyklendarstellnung an:

1. (12)(23)(34)
2. (146)(235)(36)
3. etc.

15 S_n: Verknüpfung

Gegeben zwei Permutationen, schreibe das Produkt in Zweizeilendarstellung an: Dabei heißt $a \circ b$ dass zuerst die Permutation b und danach a angewendet wird.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$
2. etc

16 S_n und A_n

S_n ist die symmetrische Gruppe (Gruppe aller Permutationen), A_n die alternierende Gruppe (Gruppe aller geraden Permutationen).

Welche der folgenden Gruppen sind kommutativ? Welche zyklisch?

1. S_2
2. S_3
3. S_4
4. S_5
5. A_2
6. A_3
7. A_4
8. A_5

17 Nebenklassen

Gib die Rechtsnebenklassen Ua bzw die Linksnebenklasse aU der folgenden $U < G$ und $a \in G$ an. Für endliche Gruppen: Gib an wieviele Element die Rechts- bzw die Linksnebenklasse hat.

1. $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$, $U = \langle\overline{5}\rangle$, $a = \overline{2}$
2. $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$, $U = \langle\overline{5}\rangle$, $a = \overline{0}$
3. $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$, $U = \langle\overline{6}\rangle$, $a = \overline{2}$
4. $G = (\mathbb{Z}_{12}, +)$, $U = \langle\overline{6}\rangle$, $a = \overline{0}$
5. $G = S_3$, $U = A_3$, $a = (12)$
6. $G = S_3$, $U = \{e, (12)\}$, $a = (23)$.
7. $G = (V, +)$ für den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit Standardbasis e_1, e_2, e_3;

   U der Unterraum $\langle e_1, e_3\rangle$, und $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
8. G die 2×2 Matrizen über dem Grundkörper $\mathbb{Z}_2$, U die Diagonalmatrizen, und $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
9. etc

18 Gruppen 2

Welche der folgenden Strukturen sind Gruppen, welche kommutative Gruppen?

1. $(\mathbb{N}, +)$
2. $(\mathbb{Z}, +)$
3. $(\mathbb{Q}, +)$
4. $(\mathbb{R}, +)$
5. $(\mathbb{C}, +)$
6. $(\mathbb{N}, \cdot)$
7. $(\mathbb{Z}, \cdot)$
8. $(\mathbb{Q}, \cdot)$
9. $(\mathbb{R}, \cdot)$
10. $(\mathbb{C}, \cdot)$
11. $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +)$
12. $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +)$
13. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +)$
14. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$
15. $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, +)$
16. $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \cdot)$
17. $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$
18. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
19. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
20. $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$
21. $(\{x \in \mathbb{C} : xne0\}, +)$
22. $(\{x \in \mathbb{C} : x \neq 0\}, \cdot)$
23. $(\{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}, +)$
24. $(\{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}, +)$
25. $(\{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}, \cdot)$
26. $(\{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}, \cdot)$
27. $(\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}, +)$
28. $(\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, +)$
29. $(\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}, \cdot)$
30. $(\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, \cdot)$
31. $(\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, +)$
32. $(\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, +)$

33. $(\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, \cdot)$
34. $(\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, \cdot)$
35. $(L(n), \cdot)$, die $n \times n$-Matrizen mit der Matrixmultiplikation.
36. $(L(n), +)$, die $n \times n$-Matrizen mit der Matrixaddition.
37. $(GL(n), \cdot)$, die invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit der Matrixmultiplikation.
38. $(GL(n), +)$, die invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit der Matrixaddition.
39. $(V, +)$ wobei V ein Vektorraum ist und $+$ die Vektor-Addition.
40. $(L(V, W), +)$ mit V W Vektorräumen.
41. $(L(V), \circ)$ mit V Vektorraum.
42. etc

19 Gruppen-Einbettungen

Für welche der folgenden Gruppen G, H läßt sich G in H einbetten? (Mit Einbettung bezeichnen wir einen injektiven Homomorphismus.) K bezeichnet einen beliebigen Körper. $\mathrm{GL}(n)$ sind die invertierbaren $n \times n$-Matrizen über K, mit der Matrix-Multiplikation als Verknüpfung.)

1. $G = (K, +)$ und H die $n \times n$ Matrizen über K mit der Matrix-Addition (wobei K ein beliebiger Körper ist).
2. $G = (K \setminus \{0\}, \cdot)$ und $H = \mathrm{GL}(n)$ über K.
3. $G = (\mathbb{Z}, +)$ und H die 2×2 Matrizen über $\mathbb{Q}$ mit der Matrix-Addition.
4. $G = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ und H die $\mathrm{GL}(2)$ über $\mathbb{Q}$.
5. G die $\mathrm{GL}(2)$ über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$ und $H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$.
6. G die $\mathrm{GL}(2)$ über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$ und $H = (\mathbb{Q}, +)$.
7. G die $\mathrm{GL}(2)$ über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$ und $H = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
8. $G = (\mathbb{Z}, +)$ und $H = (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$
9. $G = (\mathbb{Z}, +)$ und H die $\mathrm{GL}(2)$ über dem Grundkörper $\mathbb{Q}$.
10. $(\mathbb{Z}_2^{10}, +)$ (Vektorraum-Addition) und S_{11}
11. S_{27} und S_{28}
12. $\mathbb{Z}_{235}$ und S_{235}
13. $\mathbb{Z}_{1000}$ und S_5
14. S_4 und $\mathbb{Z}_{41}$
15. S_5 und $\mathbb{Z}_6$
16. S_3 und $\mathbb{Z}$

17. $\mathbb{Z}_2$ und $\mathbb{Z}_6$
18. $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_6$
19. $\mathbb{Z}_5$ und $\mathbb{Z}_{41}$
20. $\mathbb{Z}_6$ und $\mathbb{Z}_{12}$
21. etc

20 Untergruppen

Ist G Unterruppe von H?

1. $H = (V, +)$ für V der Vektorraum $\mathbb{R}^2$, und $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \geq 0 \right\}$
2. $H = (V, +)$ für V der Vektorraum $\mathbb{R}^2$, und $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{Q} \right\}$
3. $H = (V, +)$ für V der Vektorraum $\mathbb{R}^2$, und $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$
4. $H = (V, +)$ für V der Vektorraum $\mathbb{R}^2$, und $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$
5. $H = \mathrm{GL}(2)$ (mit Matrixmultiplikation) und G die symmetrischen Matrizen in $\mathrm{GL}(2)$.
6. $H = \mathrm{GL}(2)$ (mit Matrixmultiplikation) und G die Diagonalatrizen in $\mathrm{GL}(2)$.
7. $H = \mathrm{GL}(n)$ (mit Matrixmultiplikation) und $G = \mathrm{SL}(n)$.
8. $H = \mathrm{GL}(n)$ (mit Matrixmultiplikation) über dem Grundkörper $\mathbb{R}$, und $G = \mathrm{O}(n)$
9. $H = (\mathbb{Z}, +)$ und G die geraden Zahlen
10. $H = (\mathbb{Z}, +)$ und G die ungeraden Zahlen
11. $H = (\mathbb{Z}_6, +)$ und $G = \{\overline{0}, \overline{3}\}$
12. $H = (\mathbb{Z}_5, +)$ und $G = \{\overline{0}, \overline{3}\}$
13. $H = (\mathbb{Z}_6, +)$ und $G = \{\overline{0}, \overline{2}\}$
14. $H = (\mathbb{Z}_4, +)$ und $G = \{\overline{0}, \overline{2}\}$
15. $H = (\mathbb{Z}_8, +)$ und $G = \{\overline{0}, \overline{2}\}$
16. etc

21 Untergruppen 2

Was gilt allgemein für Gruppen G und Untergruppen $U < G$:

1. Wenn G kommutativ ist, dann ist U kommutativ.
2. Wenn U kommutativ ist, dann ist G kommutativ.
3. Wenn G zyklisch ist, dann ist U zyklisch.
4. Wenn U zyklisch ist, dann ist G zyklisch.
5. Wenn G endlich ist, dann teilt die Größe (Ordnung) von U diejenige von G.
6. Wenn G endlich ist, und die Primzahl p die Größe (Ordnung) von G teilt, dann hat G eine Untergruppe der Größe p.
7. Wenn U ein Element mit Ordnung 17 enthält, dann auch G.
8. Wenn G ein Element mit Ordnung 17 enthält, dann auch U.
9. Wenn G ein Element mit Ordnung 17 enthält, und $a \in U$, dann teilt die Ordnung von a 17.

22 Ringe und Körper

Welche der folgenden Strukturen sind Ringe, kommutative Ringe, Körper?

1. $(\mathbb{N}, +, \cdot)$
2. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$
3. $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$
4. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$
5. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$
6. $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, +, \cdot)$
7. $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, +, \cdot)$
8. $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, +, \cdot)$
9. $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +, \cdot)$
10. $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, +, \cdot)$
11. $(\{x \in \mathbb{Z} : x \geq 0\}, +, \cdot)$
12. $(\{x \in \mathbb{Z} : x > 0\}, +, \cdot)$
13. $(\{x \in \mathbb{Q} : x \geq 0\}, +, \cdot)$
14. $(\{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}, +, \cdot)$
15. $(\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, +, \cdot)$
16. $(\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, +, \cdot)$
17. $(\{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}, +, \cdot)$
18. $(\{x \in \mathbb{R} : x > 0\}, +, \cdot)$
19. Die linearen Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ mit der Addition und Verknüpfung.
20. $(R[X], +, \cdot)$ wobei R ein KRE ist, $+$ die Polynomaddition und $\cdot$ die Polynommultiplikation

21. $(\mathrm{GL}(n), +, \cdot)$ über einem Körper K, wobei $+$ und $\cdot$ die Matrix-Addition und -Multiplikation ist.

22. Die 4×7 Matrizen über dem Grundkörper $\mathbb{R}$ (mit der Matrix-Addition und -Multiplikation).

23. Die 4×4 Matrizen über dem Grundkörper $\mathbb{R}$ (mit der Matrix-Addition und -Multiplikation).

23 Ring-Einbettungen

Welche der folgenden Ringe lassen sich ineinander einbetten? (Ring-Einbettungen sind injektive Ring-Homomorphismen. Ein Ring-homomorphismus bildet das Einselement auf das Einselemnent ab.)

1. $\mathbb{Z}_2$ in $\mathbb{Z}_4$
2. $\mathbb{Z}_4$ in $\mathbb{Z}_2$
3. $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{C}$
4. $L(\mathbb{Z}_{41}^2)$ in $\mathbb{Z}$ ($L(\mathbb{Z}_{41}^2)$ sind die 2×2 Matrizen über dem Grundkörper $\mathbb{Z}_{41}$)
5. $\mathbb{Z}$ in $L(\mathbb{Z}_{41}^2)$ ($L(\mathbb{Z}_{41}^2)$ sind die 2×2 Matrizen über dem Grundkörper $\mathbb{Z}_{41}$)
6. $\mathbb{Z}_{41}[X]$ in $\mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}_{41}[X]$ sind die Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_{41}$)
7. $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Z}_{41}[X]$ ($\mathbb{Z}_{41}[X]$ sind die Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_{41}$)
8. $\mathbb{Z}$ in $L(\mathbb{Q}^2)$ ($L(\mathbb{Q}^2)$ sind die rationalen 2×2 Matrizen)
9. etc

24 Unterringe

Welches der folgenden sind Unterringe der 7×7 Matrizen über $\mathbb{R}$? (Unterringe müssen per Definition dasselbe Einselement enthalten.) Sind sie sogar Körper?

1. Die Diagonalmatrizen.
2. Die Diagonalmatrizen die denselben Eintrag in der Diagonale haben, d.h. $a_{i,j} = \lambda$ für $i = j$ und 0 sonst.
3. Die symmetrischen Matrizen.
4. Die invertierbaren Matrizen.
5. Die Projektionen.
6. Die orthogonalen Matrizen.

7. Die Matrizen deren Einträge allesamt dieselbe Zahl sind, d.h. $a_{i,j} = c$ für alle i, j.
8. Die oberen Dreiecksmatrizen, d.h. $a_{i,j} = 0$ wenn $i > j$.
9. Die unteren Dreiecksmatrizen, d.h. $a_{i,j} = 0$ wenn $i < j$.

25 Unterringe und Körper

Welches der folgenden Teilmengen der 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$ sind

- Abgeschlossen unter Addition? (D.h., enthalten mit A, B auch $A + B$.)
- Abgeschlossen unter Additiven Inversen? (D.h., enthalten mit A auch $-A$.)
- Abgeschlossen unter Multiplikation? (D.h., enthalten mit A, B auch $A \cdot B$.)
- Sind Unterring des Rings der 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$? (Unterringe müssen per Definition dasselbe Einselement enthalten.)
- Sind sogar ein Körper?
- Sind Unter-Vektorraum des Vektorraums der 2×2 Matrizen über $\mathbb{R}$?

1. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$
2. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$
3. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$
4. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$.
5. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$.
6. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & a \\ a & a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$.
7. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$.
8. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für $a \in \mathbb{R}$.
9. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$

10. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$

11. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$

12. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ -a & b \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$

13. Die Matrizen der Form $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$

26 Vektorraum-Einbettungen

Gibt es eine Einbettung (lineare injektive Abbildung) vom Vektorraum V in den Vektorraum W (alle VR über $\mathbb{R}$)?

1. $V = \mathbb{R}^4$ und $W = \mathbb{R}^{12}$
2. $V = \mathbb{R}^{13}$ und $W = \mathbb{R}^{11}$
3. V die 2×3 Matrizen und $W = \mathbb{R}^5$
4. V die 2×3 Matrizen und $W = \mathbb{R}^7$
5. $V = \mathbb{R}^4$ und W die 2×2-Matrizen
6. etc

27 Untergruppen einer gegebenen Größe

Hat die Gruppe G eine Untergruppe der Größe n?

1. $G = (\mathbb{Z}_6, +)$, $n = 2$
2. $G = (\mathbb{Z}_6, +)$, $n = 3$
3. $G = (\mathbb{Z}_6, +)$, $n = 5$
4. $G = (\mathbb{Z}_{110}, +)$, $n = 11$
5. $G = S_{12}$, $n = 10!$
6. $G = S_{12}$, $n = 11$
7. $G = S_{12}$, $n = 13$
8. $G = S_7$, $n = 11$
9. $G = (\mathbb{Z}, +)$, $n = 10$
10. etc

28 Matrizen: Elementare Operationen

Welcher der folgenden Sätze gilt für alle Matrizen A, wobei X "Bild", "Kern", "Rang", "Spur" oder "Determinante" oder "die Invertierbarkeit von A" sein kann:

1. Vertauschen zweier Zeilen lässt X unverändert.
2. Vertauschen zweier Spalten lässt X unverändert.
3. Multiplikation einer Zeile mit $\lambda \neq 0$ lässt X unverändert.
4. Multiplikation einer Spalte mit $\lambda \neq 0$ lässt X unverändert.

5. Multiplikation einer Zeile mit (bzw: ersetzen durch) 0 lässt X unverändert.
6. Multiplikation einer Spalte mit (bzw: ersetzen durch) 0 lässt X unverändert.

Gilt allgemein:

7. Wenn B durch eine elementare Zeilenoperation aus A konstruieren kann, dann ist B ähnlich zu A.
8. Wenn B ähnlich ist zu A, dann kann man B durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen aus A konstruieren.

29 $n \times n$ Matrizen

Welcher der folgenden Sätze gilt für alle $n \times n$ Matrizen (bzw für alle invertierbaren $n \times n$-Matrizen, falls A^{-1} erwähnt wird):

1. Wenn $A = A^{-1}$, dann $\det(A) = 1$
2. Wenn $A = A^{-1}$, dann $\det(A) = \pm 1$
3. Wenn A Projektion ist, dann ist $\det(A) = \pm 1$
4. Wenn A Orthogonal ist, dann ist $\det(A) = 1$
5. Wenn A Orthogonal ist, dann ist $\det(A) = \pm 1$
6. Wenn $\det(A) = 1$ dann ist A orthogonal.
7. Wenn $\det(A) = 1$ dann ist A Drehung.
8. Wenn A Drehung ist dann ist $\det(A) = 1$
9. $\det(A) = \det(A^{-1})$
10. $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$
11. $\det(A^\top) = \det(A)^{-1}$
12. $\det(A^\top) = \det(A)$
13. $\det(A^\top) = \det(A^{-1})$
14. Die Verknüpfung von Projektionen ist eine Projektion.
15. Die Summe zweier Projektionen ist eine Projektion.
16. Das Vielfache (mit einem $\lambda \in K$) einer Projektion ist eine Projektion.
17. Das Vielfache mit einem $\lambda \in K$ ungleich Null einer Projektion ist eine Projektion.

18. Das Produkt zweier symmetrischen Matrizen ist symmetrisch.
19. Die Summe zweier symmetrischen Matrizen ist symmetrisch.
20. Das Vielfache (mit einem $\lambda \in K$) einer symmetrischen Matrix ist symmetrisch.
21. Das Vielfache mit einem $\lambda \in K$ ungleich Null einer symmetrischen Matrix ist symmetrisch.
22. Das Produkt zweier invertierbaren Matrizen ist invertierbar.
23. Die Summe zweier invertierbaren Matrizen ist invertierbar.
24. Das Vielfache (mit einem $\lambda \in K$) einer invertierbaren Matrix ist invertierbar.
25. Das Vielfache mit einem $\lambda \in K$ ungleich Null einer invertierbaren Matrix ist invertierbar.
26. Wenn A eine Projektion ist, dann ist $A^n = A$ für jedes natürliche $n \geq 1$.
27. Jede komplexe $n \times n$-Matrix hat mindestens einen komplexen Eigenwert.
28. Eine komplexe 2×2-Matrix hat zwei verschiedene komplexe Eigenwerte.
29. etc

30 Eigenwerete und -Vektoren

Welcher der folgenden Sätze gilt allgemein:

1. Wenn λ ein Eigenwert von A ist, dann ist λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A.
2. Wenn λ Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A ist, dann ist λ ein Eigenwert von A.
3. Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ in K gibt es kein $v \neq 0$ in V das gleichzeitig Eigenvektor von λ_1 und λ_2 ist.
4. Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ in K und v_1 ein λ_1-Eigenvektor und v_2 ein λ_2-Eigenvektor ist v_1 und v_2 orthogonal.
5. Für $\lambda_1 \neq \lambda_2$ in K und v_1 ein λ_1-Eigenvektor und v_2 ein λ_2-Eigenvektor ist v_1 und v_2 l.u.
6. Zwei orthogonale Vektoren können nicht Eigenvektoren desselben Eigenwertes sein.
7. λ ist Eigenwert von A gdw $\frac{1}{\lambda}$ Eigenwert von A^{-1} ist.
8. Wenn die reelle $n \times n$-Matrix A einen Eigenwert in $\mathbb{C}$ hat, dann auch in $\mathbb{R}$.

9. Für die reelle $n \times n$-Matrix A und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt: Es gibt ein $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ gdw es gibt ein $\vec{v} \in \mathbb{C}^2$ mit $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

10. Etc

31 Eigenwerte bestimmen

Welche der folgenden Zahlen sind Eigenwerte der Matrix A? (Wenn A keine Eigenwerte hat ist keine Zahl anzukreuzen, wenn A genau einen EW hat dann ist dieser EW anzukreuzen, wenn A zwei verschiedene hat dann sind beide anzukreuzten, etc)

1. $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
8. etc

32 Verknüpfungstabellen

In welchen der Strukturen $\{a, b, c\}$ mit der folgenden Verknüpfungstabelle ist $\cdot$ kommutativ? Gibt es ein neutrales Element? (welches?) Wenn es ein neutrales Element gibt: Ist die Operation assoziativ? Eine Gruppe? (Hinweis: Für assoziativität muss hier nur $(xy)x = x(yx)$, $(xx)y = x(xy)$, $(xy)y = x(yy)$ geprüft werden für x, y Elemente ungleich dem neutralen Element.)

1.

	a	b	c
a	a	b	b
b	a	c	a
c	b	b	a

2.

	a	b	c
a	b	c	c
b	c	b	a
c	b	a	b

3.

	a	b	c
a	a	a	c
b	a	b	c
c	b	c	a

4.

	a	b	c
a	a	c	a
b	b	c	b
c	a	b	c

5.

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	c	a
c	a	a	a

6.

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	b	a
c	a	a	a

7.

	a	b	c
a	b	b	a
b	b	b	b
c	a	b	c

8.

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	b
c	a	b	c

9.

	a	b	c
a	c	a	b
b	a	b	c
c	b	c	a

10.

	a	b	c
a	b	c	a
b	c	a	b
c	a	b	c

33 Verknüpfungstabellen 2

Gegeben die folgende teilweise ausgefüllte Verknüpfungstabelle der Gruppe $G = \{e, a, b, c\}$ bzw $G = \{e, a, b, c\}$ mit neutralem Element e. Ergänze die Verknüpfungstabelle. Ist das eindeutig möglich?

1.

	e	a	b
e	□	□	□
a	□	□	□
b	□	□	□

2.

	e	a	b	c
e	□	□	□	□
a	□	e	□	□
b	□	□	e	□
c	□	□	□	□

3.

	e	a	b	c
e	□	□	□	□
a	□	c	□	□
b	□	□	c	□
c	□	□	□	□

4.

	e	a	b	c
e	□	□	□	□
a	□	e	c	□
b	□	□	□	□
c	□	□	□	□

5.

	e	a	b	c
e	□	□	□	□
a	□	□	c	□
b	□	c	□	□
c	□	□	□	□

6.

	e	a	b	c
e	□	□	□	□
a	□	e	□	□
b	□	□	□	□
c	□	□	e	□

7.

	e	a	b	c
e	□	□	□	□
a	□	b	c	□
b	□	□	□	□
c	□	□	□	□

8. etc.

34 Verknüpfungstabellen 3

Sei $G = \{e, a, b, c\}$ und $\circ$ die durch folgende Verknüpfungstabelle gegebene Operation. Es gilt dass $\circ$ assoziativ ist (das muss nicht mehr nachgerechnet werden). Ist $(G, \circ)$ eine Gruppe?

1.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	a	c	a
b	b	a	b	c	b
c	c	c	c	c	c
d	d	a	b	c	d

2.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	c	d	e
b	b	c	d	e	a
c	c	d	e	a	b
d	d	e	a	b	c

3.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	e	d	b
b	b	e	d	a	c
c	c	d	a	b	e
d	d	b	c	e	a

4.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	d	c	e	b
b	b	c	a	d	e
c	c	e	d	b	a
d	d	b	e	a	c

5.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	c	c	c
b	b	b	b	b	b
c	c	c	c	c	c
d	d	b	b	b	b

9.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	a	b	a	a
b	b	b	b	b	b
c	c	c	b	c	c
d	d	a	b	c	d

6.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	d	e	b	c
b	b	e	c	d	a
c	c	b	d	a	e
d	d	c	a	e	b

10.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	d	e	c
b	b	d	c	a	e
c	c	e	a	d	b
d	d	c	e	b	a

7.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	a	c	c	a
b	b	c	a	a	b
c	c	c	a	a	c
d	d	a	b	c	d

11.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	b	b	b	b
b	b	b	b	b	b
c	c	b	b	c	d
d	d	b	b	d	c

8.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	a	b	c	c
b	b	c	c	c	b
c	c	c	c	c	c
d	d	c	c	c	d

12.

	e	a	b	c	d
e	e	a	b	c	d
a	a	c	d	b	e
b	b	d	a	e	c
c	c	b	e	d	a
d	d	e	c	a	b

35 Identifizieren von Projektionen

Ist die folgende Matrix eine Projektion?

1. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 7 & 20 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 5 & -5 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -14 & -5 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -10 & -5 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -41 & 7 \end{pmatrix}$
9. etc

36 Quadrieren von Projektionen

Die folgende Matrix A ist eine Projektion. Berechne die Spur $\mathrm{Tr}(A^2)$.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 6 \\ -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \frac{10}{13} & -\frac{9}{13} & -\frac{3}{13} \\ -\frac{6}{13} & -\frac{5}{13} & -\frac{6}{13} \\ \frac{8}{13} & \frac{24}{13} & \frac{21}{13} \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} \frac{6}{7} & -\frac{12}{7} & -\frac{6}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{3}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{6}{7} & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
9. etc

37 Identifizieren von orthogonalen Matrizen

Ist die folgende Matrix orthogonal?

1. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
9. etc

38 Invertieren von orthogonalen Matrizen

Die folgende Matrix A ist orthogonal. Berechne die Spur $\mathrm{Tr}(A^{-1})$.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
9. etc

39 Berechnen der Determinante

Berechne $\det(A^2)$ für die folgende Matrix A:

1. $\begin{pmatrix} 0 & -2 & -4 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & -4 & 4 \\ -3 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} -2 & -4 & 2 & -4 \\ -3 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & -3 & -3 \\ 1 & -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & -3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$

8. $\begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

9. etc

40 Euklidischer Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus gibt für $1 < a < b$ ganze Zahlen x, y mit $x \cdot a + y \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b)$. Berechne $|x| + |y|$ (die Summe der Absolutbeträge).

(Bemerkung: Es sind diejenigen x und y gesucht die sich wie in der VO besprochen aus dem Euklidischen Algorithmus ergeben; es gibt auch andere x' y' mit der Eigenschaft $x' \cdot a + y' \cdot b = \mathrm{ggT}(a, b)$.)

1. $a = 14$, $b = 19$
2. $a = 24$, $b = 33$
3. $a = 26$, $b = 44$
4. $a = 21$, $b = 36$
5. $a = 36$, $b = 44$
6. $a = 11$, $b = 14$
7. $a = 16$, $b = 37$
8. $a = 41$, $b = 49$
9. $a = 32$, $b = 38$
10. $a = 34$, $b = 48$
11. $a = 22$, $b = 31$
12. $a = 23$, $b = 27$
13. $a = 11$, $b = 20$
14. etc

41 Inverse in $\mathbb{Z}_n$

Berechne (z.B. mithilfe des Euklidischen Algorithmus) $\overline{a}^{-1}$ in $\mathbb{Z}_n$. Genauer: Finde $0 \leq b < n$ (Achtung! nur dieses b verwenden) s.d $\overline{a} \cdot \overline{b} = 1$ in $\mathbb{Z}_n$, oder äquivalent: $a \cdot b \equiv 1 \mod n$. Als Antwort ist das $0 \leq c < 5$ gesucht mit $b \equiv c \mod 5$.

Bsp: Angenommen $n = 47$ und $a = 41$, dann bekommt man als a^{-1} z.B. -8 (weil $-8 \cdot 41 = -328 \equiv 1 \mod 47$). Dann ist das gesuchte $b = -8 + 47 = 39$. (Beachte: $\overline{b} = \overline{-8}$ ist das eindeutige Inverse von $\overline{a}$ in $\mathbb{Z}_n$.) Daher ist $c = 4$ ($39 \equiv 4 \mod 5$).

1. $n = 35$, $a = 33$
2. $n = 47$, $a = 22$
3. $n = 35$, $a = 24$
4. $n = 31$, $a = 14$
5. $n = 27$, $a = 23$
6. $n = 37$, $a = 16$
7. $n = 47$, $a = 17$
8. $n = 14$, $a = 11$
9. etc

42 Drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Sind die folgenden Vektoren x, y, z in $V = \mathbb{R}^3$ l.u.? Erzeugen Sie V? Sind sie eine Basis? Sind sie orthonormal? Sind sie eine ONB?

1. $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$
2. $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
3. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$
4. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$
5. $x = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
6. $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$
7. $x = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$
8. $x = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
9. $x = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
10. $x = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$
11. $x = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
12. $x = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
13. $x = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
14. $x = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$
15. etc

43 Vier Vektoren im $\mathbb{R}^3$

Sind die folgenden vier Vektoren im $V = \mathbb{R}^3$ l.u.? Erzeugen Sie V? Sind sie eine Basis? Sind sie orthonormal? Sind sie eine ONB?

1. $\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\-3\\4\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\14\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\9\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix}7\\13\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix}2\\-4\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\2\end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix}1\\11\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\5\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\17\\10\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix}-4\\4\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\2\\-2\end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}9\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix}-5\\-5\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\4\\-5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\3\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\3\\-5\end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix}4\\-2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-2\\-1\end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix}-2\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix}-5\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix}6\\0\\9\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix}0\\9\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix}-1\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\4\end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix}2\\1\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix}3\\2\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-4\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\0\\-2\end{pmatrix}$
21. $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\10\\4\end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix}7\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}8\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$
23. $\begin{pmatrix}-2\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-5\\0\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\-2\end{pmatrix}$
24. $\begin{pmatrix}2\\3\\-4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-5\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}$

44 Zwei Vektoren im $\mathbb{R}^4$

Sind die folgenden zwei Vektoren l.u.? Erzeugen sie den $\mathbb{R}^4$? Sind sie eine Basis? Sind sie orthonormal? Eine ONB?

1. $\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-6\\4\\-2\end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix}1\\3\\-2\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-6\\4\\3\end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

45 Linear unabhängig in $\mathbb{Z}_p^2$

Sind die folgenden zwei Vektoren in $\mathbb{Z}_p^2$ l.u.? Erzeugen Sie V? Sind sie eine Basis? Der besseren Lesbarkeit halber schreiben wir nur 2 statt $\overline{2}$ etc.

1. $p = 3$, $\binom{2}{1}, \binom{2}{2}$
2. $p = 7$, $\binom{4}{4}, \binom{4}{6}$
3. $p = 5$, $\binom{2}{4}, \binom{1}{2}$
4. $p = 3$, $\binom{1}{2}, \binom{1}{1}$
5. $p = 5$, $\binom{4}{2}, \binom{4}{3}$
6. $p = 5$, $\binom{2}{1}, \binom{3}{3}$
7. $p = 7$, $\binom{4}{2}, \binom{6}{3}$
8. $p = 7$, $\binom{1}{4}, \binom{3}{4}$
9. $p = 3$, $\binom{1}{1}, \binom{2}{2}$
10. $p = 7$, $\binom{6}{5}, \binom{6}{5}$
11. $p = 5$, $\binom{4}{4}, \binom{4}{4}$
12. $p = 3$, $\binom{2}{1}, \binom{2}{1}$
13. $p = 7$, $\binom{4}{1}, \binom{6}{5}$
14. $p = 5$, $\binom{1}{1}, \binom{4}{4}$
15. $p = 5$, $\binom{2}{4}, \binom{1}{3}$
16. $p = 5$, $\binom{3}{3}, \binom{4}{4}$
17. $p = 5$, $\binom{3}{2}, \binom{3}{1}$
18. $p = 7$, $\binom{5}{2}, \binom{4}{6}$

Bzw.: Für welches p sind die gegebene Vektoren l.u. / Basis / ... in $\mathbb{Z}_p^2$?
Gilt allgemein:

1. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und $v \neq \vec{0}$ in V.
   Dann ist $v + v \neq \vec{0}$.
2. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und $\lambda \neq 0$ in K, und $v \neq \vec{0}$ in V.
   Dann ist $\lambda v \neq \vec{0}$.

3. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und (v_1, v_2) l.u.
   Dann ist auch $(v_1, v_2 + v_1)$ l.u.
4. Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, und (v_1, v_2) l.u.
   Dann ist auch $(v_1, v_2 + v_2)$ l.u.

46 Rang von reellen Matrizen

Was ist der Zeilenrang, der Spaltenrang, der Rang der folgenden Matrix A? Was ist die Dimension von $\ker(A)$ und von $\mathrm{img}(A)$? Ist A injektiv, surjektiv, bijektiv?

1. Betrachte die Matrix M deren Spalten aus den drei Vektoren aus Beispiel 42.1 besteht

2 etc Analog für die anderen Punkte aus Beispiel 42.

47 Invertierbarkeit von reellen Matrizen

Welche der folgenden reellen $2x2$ oder $3x3$ Matrizen ist invertierbar?

1. $\begin{pmatrix} -2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$
3. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} -4 & -3 & -3 \\ 4 & 4 & 2 \\ -3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$
9. $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
10. $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$
11. $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
12. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
13. $\begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$
14. $\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
15. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
16. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 \\ -4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$
17. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$
18. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
19. $\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$
20. $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$
21. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$
22. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

48 Rang von Matrizen über $\mathbb{Z}_p$

(Frage wurde aus dem Katalog entfernt)

49 Lösungen von linearen Gleichungssystemen

Hat das Gleichungsystem $Ax = b$ (über $\mathbb{R}$): keine Lösung; genau eine Lösung; oder mehr als eine Lösung?

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 9 & 4 & 7 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 5 \\ -22 \\ -6 \\ -38 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} -3 & -6 & 3 \\ -3 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -6 & -6 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 27 \\ 20 \\ 7 \\ 33 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
5. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$
6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$
7. $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$
8. $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$
9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
10. $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 4 \\ -1 & -2 & 4 \\ -5 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$
11. $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & 4 & -6 \\ 0 & 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
12. $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & -2 & -1 \\ 2 & 10 & 11 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
13. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix}$
14. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$
15. $A = \begin{pmatrix} -4 & -5 & 3 \\ -2 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -16 \\ -13 \\ 10 \end{pmatrix}$
16. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 0 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ -1 & -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
17. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$
18. $A = \begin{pmatrix} -2 & -4 & 5 \\ 1 & 7 & -5 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$
19. etc

50 Basiswechsel: Vektoren

Gegeben eine Basis $B = (b_1, b_2, b_3)$. Die B-Darstellung des Vektors v ist $\vec{a}$. Berechne die Darstellung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ von v in der Standardbasis. Als Antwort gefragt ist x_1.

1. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
2. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. etc

51 Basiswechsel: Vektoren, orthonormal

Gegeben ein Vektor $\vec{a}$ (in Standardbasis) und eine Orthonomalbasis $B = (b_1, b_2, b_3)$. Berechne die B-Darstellung $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ von $\vec{a}$. Als Antwort gefragt ist x_1.

1. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$
2. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$
3. $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$
4. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
5. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
6. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$
7. $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

8. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

9. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

10. $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$

11. etc

52 Basiswechsel: $n \times n$ Matrizen, orthonormal

Gegeben eine 2×2 Matrix A und eine Orthonormalbasis $B = (b_1, b_2)$. Sei C die B-Darstellung von A. Was ist $c_{1,1}$ (d.h. der erste Eintrag der ersten Zeile von C)?

1. $b_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

2. $b_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

3. $b_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

4. $b_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

5. $b_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

6. $b_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

53 Basiswechsel Matrizen im Definitionsbereich

Die Lineare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ hat die (E, E')-Darstellung A. Sei B diejenige Basis des $\mathbb{R}^2$ deren Vektoren die E-Darstellung (b_1, b_2) haben. Sei C die (B, E')-Darstellung von A. Was ist $c_{1,1}$ (d.h. der erste Eintrag der ersten Zeile von C)?

1. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$

2. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. etc

54 Komplemente

Gegeben $W_1 = (b_1, b_2)$ und $W_2 = (b_3)$ im $\mathbb{R}^3$. Sind W_1 und W_2 Komplemente? Orthogonale Komplemente?

1. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. $b_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3. $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

5. $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

7. $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

8. $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

9. $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

10. $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

11. $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

12. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

13. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

14. $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

15. $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

16. $b_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

17. $b_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

18. $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

19. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

20. $b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

21. $b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

22. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

23. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

24. $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $b_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$
25. etc

55 RSA 1

Es werden multiple Choice Fragen der Folgenden Form gestellt (für möglicherweise andere p, q):

Gegeben $p = 5$ und $q = 7$, $n := p \cdot q$. Welche der folgeden Zahlen ist eine gültige Wahl für den public Key e?

1. 2
2. 3
3. 4
4. 5
5. 6
6. 7
7. 8
8. 9
9. 10
10. 11
11. 12
12. 13
13. 14
14. 15
15. 16

56 RSA 2

Es werden multiple Choice Fragen der Folgenden Form gestellt (für möglicherweise andere p, q, e):

Wir wählen $p = 3$, $q = 11$, $e := 7$. Was ist der private key d?

1. 1
2. 2
3. 3
4. 4
5. 5
6. 9
7. 13
8. 12

57 RSA 3

Es werden multiple Choice Fragen der Folgenden Form gestellt (für möglicherweise andere n, e, t):

Gegeben der public key $n = 33$, $e = 3$. Was ist der Ciphertext c vom Klartext $t = 2$?

1. 6
2. 8
3. 9
4. 27

58 RSA 4

Es werden multiple Choice Fragen der Folgenden Form gestellt (für möglicherweise andere n, d, c):

Gegeben der private key $n = 33$, $d = 3$. Was ist der Klartext t vom Ciphertext $c = 3$?

1. 6
2. 9
3. 21
4. 27

59 RSA 5

Gegeben der public key (n, e) und der private key (n, d), mit $n = pq$ (wobei p, q so große Primzahlen sind dass man n de facto nicht ohne zusätzliche Information faktorisieren kann). Sei c_1 der verschlüsselte Ciphertext zum Reintext t_1, und c_2 der verschlüsselte Ciphertext zu einem anderen Reintext t_2. Welche der folgenden Informationen reichen aus um den Schlüssel (effizient) zu knacken?

1. p und q
2. p
3. $\varphi(n)$
4. c_1 und c_2
5. c_1 und t_1

60 RSA 6

Der öffentliche Schlüssel (e, n) ist gegeben. Brechen Sie die Verschlüsselung mit brute force, d.h. berechnen Sie den private key (d, n).

1. $e = 7$, $n = 33$
2. $e = 27$, $n = 55$
3. etc

61 Ähnliche Matrizen

Sei B ähnlich zu A, d.h. $B = U^{-1}AU$ für ein $U \in \mathrm{GL}(n)$. Was gilt allgemein:

1. $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$ (Spur)
2. $\det(A) = \det(B)$ (Determinante)
3. $\mathrm{rk}(A) = \mathrm{rk}(B)$ (Rang)
4. Wenn A die Identitätsmatrix I ist, dann ist auch $B = I$
5. Wenn A eine Projektion ist, dann auch B
6. Wenn A eine Orthogonalprojektion ist, dann auch B
7. Wenn A orthogonal ist, dann auch B
8. Wenn A eine Diagonalmatrix ist (d.h. $a_{i,j} = 0$ für $i \neq j$), dann auch B.
9. Wenn A eine obere Dreiecksmatrix ist (d.h. $a_{i,j} = 0$ für $i > j$), dann auch B.
10. Wenn A symmetrisch ist, dann auch B
11. Wenn A injektiv ist, dann auch B
12. Wenn A surjektiv ist, dann auch B
13. Wenn A bijektiv ist, dann auch B

62 Induktion 1

Ist die folgende induktive Definition wohldefiniert für alle Element von $\mathbb{N}$? (D.h. gibt es eine eindeutige Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit den angegebenen Eigenschaften?)

1. $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(p) = p$ für p Primzahl, und $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ für $1 < a \leq b$.
2. $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(p) = p$ für p Primzahl, und $f(a \cdot b) = 2 \cdot f(a) + f(b)$ für $1 < a \leq b$.
3. $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(p) = p$ für p Primzahl, und $f(a \cdot b) = 2 \cdot f(a) + 2 \cdot f(b)$ für $1 < a \leq b$.
4. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(p) = p$ für p Primzahl, und $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ für $1 < a \leq b$.
5. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(p) = p$ für p Primzahl, und $f(a \cdot b) = 2 \cdot f(a) \cdot f(b)$ für $1 < a \leq b$.
6. $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(p) = p$ für p Primzahl, und $f(a \cdot b) = f(a)^2 \cdot f(b)$ für $1 < a \leq b$.

63 Induktion 2

Welche der folgenden Beweisprinzipien ist gültig: $\varphi(x)$ gilt für alle $x \in A$, für ...

1. $A = \mathbb{N}$, wenn gilt: $\varphi(0)$, und für alle $n \in A$ gilt: $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$.
2. $A = \{z \in \mathbb{Z} : z \geq -12\}$, wenn gilt: $\varphi(-12)$, und für alle $n \in A$ gilt: $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$.
3. $A = \mathbb{Z}$, wenn gilt: $\varphi(0)$, und für alle $n \in A$ gilt: $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$.
4. $A = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0\}$, wenn gilt: $\varphi(0)$, und für alle $n \in A$ gilt: $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$.
5. $A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 12\}$, wenn gilt: $\varphi(12)$, und für alle $n \in A$ gilt: $\varphi(n) \to \varphi(n+1)$.

64 Frage zu Permutationen

1. Die Permutation c ist die Verknüpfung $p = c_1 \circ c_2 \cdots c_{\ell-1} \circ c_\ell$ von **disjunkten** Zyklen c_i. Sei $q = c_\ell \circ c_{\ell-1} \cdots c_2 \circ c_1$ (d.h. das Produkt derselben Zyklen, in umgekehrter Reihenfolge). Gilt allgemein dass $p = q$?
2. Die Permutation c ist die Verknüpfung $p = c_1 \circ c_2 \cdots c_{\ell-1} \circ c_\ell$ von **disjunkten** Zyklen c_i. Sei $q = c_\ell \circ c_{\ell-1} \cdots c_2 \circ c_1$ (d.h. das Produkt derselben Zyklen, in umgekehrter Reihenfolge). Gilt allgemein dass das Vorzeichen von p gleich dem Vorzeichen von q ist?

3. Die Permutation c ist die Verknüpfung $p = c_1 \circ c_2 \cdots c_{\ell-1} \circ c_\ell$ von **(nicht notwendigerweise disjunkten)** Zyklen c_i. Sei $q = c_\ell \circ c_{\ell-1} \cdots c_2 \circ c_1$ (d.h. das Produkt derselben Zyklen, in umgekehrter Reihenfolge). Gilt allgemein dass $p = q$?

4. Die Permutation c ist die Verknüpfung $p = c_1 \circ c_2 \cdots c_{\ell-1} \circ c_\ell$ von **(nicht notwendigerweise disjunkten)** Zyklen c_i. Sei $q = c_\ell \circ c_{\ell-1} \cdots c_2 \circ c_1$ (d.h. das Produkt derselben Zyklen, in umgekehrter Reihenfolge). Gilt allgemein dass das Vorzeichen von p gleich dem Vorzeichen von q ist?