

Übungsbeispiele

VU Elektrotechnische Grundlagen (182.691)

1. komplexe Zahlen:

$$z_1 = 1 - 1j \quad z_2 = -1 + 1j$$

$$z_3 = -1 - 1j \quad z_4 = \frac{1}{j}$$

Stellen sie diese Zahlen in Polarform dar. $(r = \sqrt{a^2 + b^2}, \tan\phi = \frac{b}{a})$

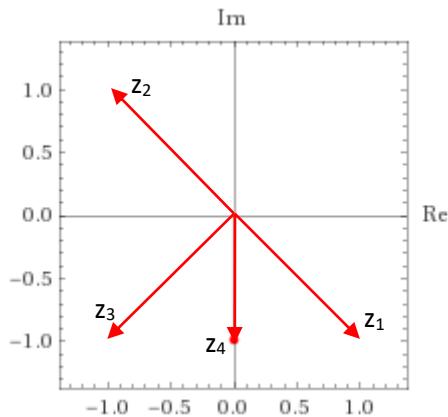
$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-\pi}{4} + j * \sin \frac{-\pi}{4} \right) \quad (-45^\circ = 315^\circ)$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + j * \sin \frac{3\pi}{4} \right) \quad (135^\circ)$$

$$z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + j * \sin \frac{5\pi}{4} \right) \quad (-135^\circ = 225^\circ)$$

$$z_4 = j^{-1} = -j = 1 \left(\cos \frac{-\pi}{2} + j * \sin \frac{-\pi}{2} \right) \quad (-90^\circ = 270^\circ)$$

Stellen sie diese Zahlen als Zeiger in der komplexen Ebene dar.



Berechnen Sie $z_1 * z_2, z_1 / z_2, z_1 * z_3, z_1 / z_3, z_1 * z_4, z_1 / z_4, z_3 / z_4$

$$z_1 * z_2 = \sqrt{2}^2 \left(\cos \frac{-\pi + 3\pi}{4} + j * \sin \frac{-\pi + 3\pi}{4} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{2} + j * \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2j$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{-\pi - 3\pi}{4} + j * \sin \frac{-\pi - 3\pi}{4} \right) = 1 (\cos \pi + j * \sin \pi) = -1$$

$$z_1 * z_3 = \sqrt{2}^2 \left(\cos \frac{-\pi + 5\pi}{4} + j * \sin \frac{-\pi + 5\pi}{4} \right) = 2 (\cos \pi + j * \sin \pi) = -2$$

$$\frac{z_1}{z_3} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{-\pi - 5\pi}{4} + j * \sin \frac{-\pi - 5\pi}{4} \right) = 1 \left(\cos \frac{-3\pi}{2} + j * \sin \frac{-3\pi}{2} \right) = j$$

$$z_1 * z_4 = \sqrt{2} * 1 \left(\cos \frac{-\pi - 2\pi}{4} + j * \sin \frac{-\pi - 2\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{-3\pi}{4} + j * \sin \frac{-3\pi}{4} \right) = z_3$$

$$\frac{z_1}{z_4} = \frac{\sqrt{2}}{1} \left(\cos \frac{-\pi + 2\pi}{4} + j * \sin \frac{-\pi + 2\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + j * \sin \frac{\pi}{4} \right) = -z_3$$

$$\frac{z_3}{z_4} = \frac{\sqrt{2}}{1} \left(\cos \frac{5\pi + 2\pi}{4} + j * \sin \frac{5\pi + 2\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + j * \sin \frac{7\pi}{4} \right) = z_1$$

(Anmerkung: Berechnen sie die Ergebnisse zunächst im Kopf und überprüfen sie die Rechnung z. B. mit Matlab.)

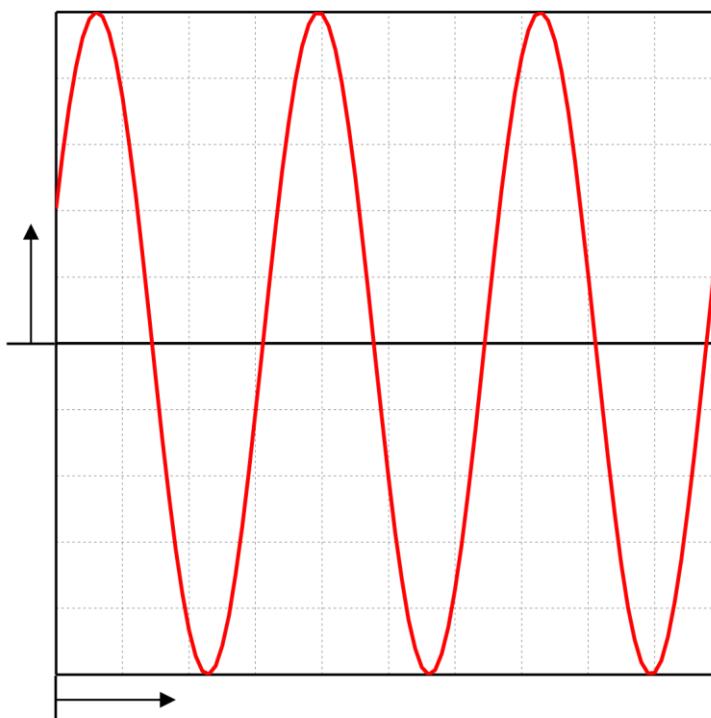
2. LTI – System

Im Labor finden sie eine Box mit einer elektrischen Schaltung. Sie können die Box nicht öffnen, sollten aber feststellen, ob es sich um eine lineare¹ Schaltung handelt. Im Labor stehen ihnen die typischen Geräte zur Verfügung: Sinusgenerator(en), Oszilloskop, ... Wie lösen sie diese Aufgabe? Begründen sie Ihre Vorgangsweise.

Sinusgenerator ans Oszilloskop anschließen → verschiedene Signale zuerst einzeln, dann gleichzeitig (Summe) messen, Laufzeit und Ausgangssignal müssen jeweils mit der Summe der zuerst gemessenen Werte übereinstimmen.

¹ Sie können Linearität zwar nicht beweisen, aber durch Messungen herausfinden, ob es sich um eine lineare Schaltung handeln kann.

3. „Oszilloskop“ – Bild



0.5 V / div

10 μ s / div

Schreiben sie die dargestellte Funktion als Kosinus-Funktion an.

Welche Frequenz hat die Schwingung? (Verwenden sie technische Notation.)

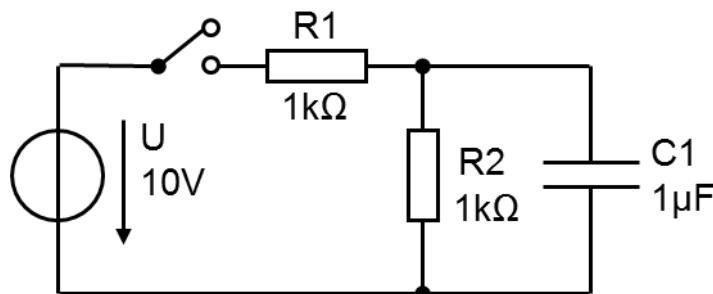
$$3 \text{ Perioden} = 100 \mu\text{s} \rightarrow 1 \text{ Periode} = 33,33 \mu\text{s} \rightarrow 30 \text{ kHz}$$

$$U(0)=1, \hat{U}=2,5 \text{ V}$$

$$U(t) = 2,5 \cos\left(30 * t - \cos^{-1} \frac{2}{5}\right)$$

$$U(t) \approx 2,5 \cos(30 * t - 1,159 \text{ rad})$$

4. Einschaltvorgang



- Wie groß ist der Spannungsabfall an R2 unmittelbar nach dem Schließen des Schalters?
Begründen Sie Ihre Antwort.
Im ersten Moment nach dem Einschalten verhält sich der Kondensator, wie ein Kurzschluss, weil sich das elektrische Feld aufbauen muss, weshalb an R2 keine Spannung abfällt.
- Wie groß ist der Spannungsabfall an R2 nach längerer Zeit, z. B. nach einer Sekunde?
Begründen sie Ihre Antwort.
Nach einer Sekunde ist der Kondensator bereits vollständig aufgeladen und verhält sich, wie eine Unterbrechung, deshalb fallen an R2 5V ab.

5. diskrete Faltung

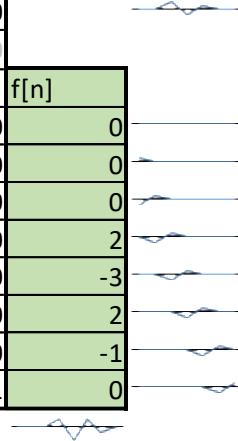
Aus analogen Signalen $g(t)$, $h(t)$ werden durch Abtastung Proben entnommen und man erhält die Folgen

$$g[n] = \dots, 0, 0, 2, 1, 1, 0, 0, \dots$$

$$h[n] = \dots, 0, 0, 1, 1, 0, 0, \dots$$

Berechnen sie die Faltungssumme² und stellen sie die einzelnen Rechenschritte grafisch dar.

k	0	1	2	3	4	5	6	
g[k]	0	0	2	-1	1	0	0	
h[-k]	0	0	-1	1	0	0	0	
n								f[n]
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	1	0	0	0	0	0	0
3	0	-1	1	0	0	0	0	2
4	0	0	-1	1	0	0	0	-3
5	0	0	0	-1	1	0	0	2
6	0	0	0	0	-1	1	0	-1
7	0	0	0	0	0	-1	1	0



² $g[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[n-k]h[k]$

6. komplexes Signal

Stellen sie das Signal $s(t) = 4 \cdot e^{-2000s^{-1} \cdot t} \cdot \cos(6283,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot t + 30^\circ)$ in komplexer Schreibweise und unter Verwendung der komplexen Amplitude \underline{X} und der komplexen Frequenz \underline{s} dar.

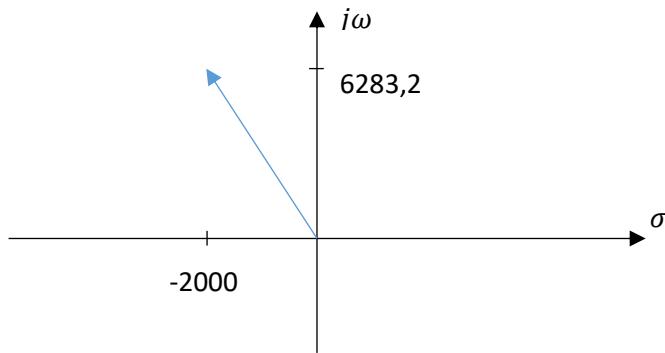
$$s(t) = \operatorname{Re}\{\underline{X}e^{\underline{s}t}\} = |\underline{X}|e^{\sigma t} \cos(\omega t + \phi)$$

$$\underline{s}(t) = \underbrace{\underline{X}e^{j\phi}}_{\underline{X}} \underbrace{e^{(\sigma+j\omega)t}}_{e^{\underline{s}t}}$$

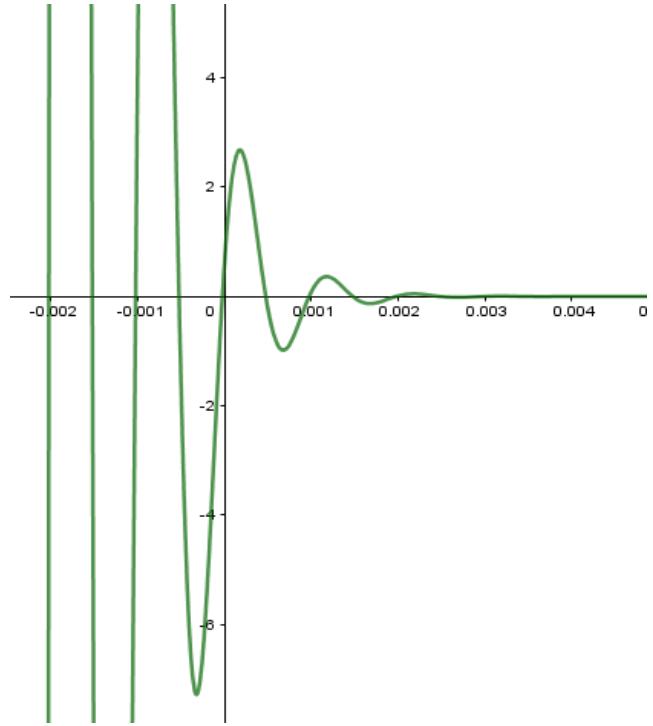
$$\rightarrow \sigma = -2000 \text{ s}^{-1}, \quad \omega = 6283,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}, \quad \phi = 30^\circ$$

$$\underline{s}(t) = \underline{X}e^{\underline{s}t} = 4 * e^{j*30^\circ} * e^{(-2000s^{-1}+j*6283,2 \frac{\text{rad}}{\text{s}})t}$$

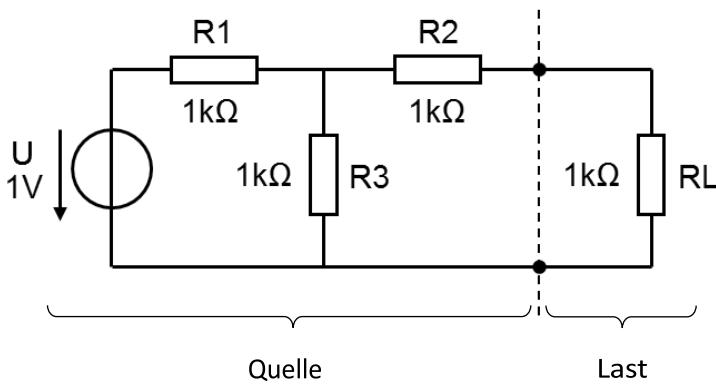
Markieren sie die Lage des Signals in der \underline{s} -Ebene.



Zeichnen sie mit passender Skalierung den Verlauf des Signals im Zeitbereich.



7. Widerstandsschaltung



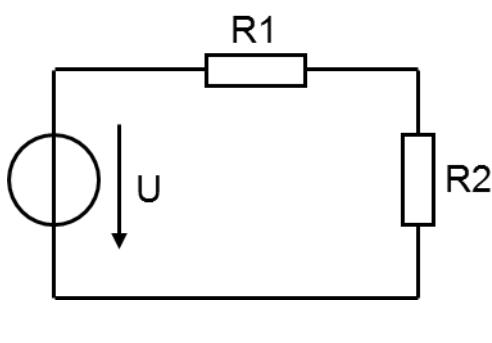
- Berechnen Sie den Spannungsabfall am Lastwiderstand RL mit der Spannungsteilerregel.
- Berechnen Sie die Kenngrößen der Ersatzspannungsquelle (Leerlaufspannung, Innenwiderstand, Kurzschlussstrom) aus der Sicht des Lastwiderstandes RL .

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{ers_{23L}}} &= \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_2 + R_L} = 1 + \frac{1}{2} \rightarrow R_{ers_{23L}} = \frac{2}{3} k\Omega \\ U_{ers_{23L}} &= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1} * 1 = \frac{2}{5} V = 400 \text{ mV} \\ U_{RL} &= \frac{1}{5} V = 200 \text{ mV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Leerlaufspannung: } & U_L = 500 \text{ mV} \\ \text{Innenwiderstand: } & R_i = R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{1}{1}} = 1,5 \text{ k}\Omega \\ \text{Kurzschlussstrom: } & I_K = \frac{U_L}{R_i} = \frac{500 \cdot 10^{-3}}{1,5 \cdot 10^3} = 333,3 \mu\text{A} \end{aligned}$$

8. Leistung in einem Widerstandsnetzwerk

Berechnen sie die Leistung (in allgemeiner Form), die im Widerstand R₂ umgesetzt wird.



$$U_2 = U * \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

$$I_2 = \frac{U_2}{R_2}$$

$$P = U * I = \frac{U^2}{R}$$

$$P_2 = \frac{\left(U * \frac{R_2}{R_1 + R_2} \right)^2}{R_2}$$

9. Wasserkocher

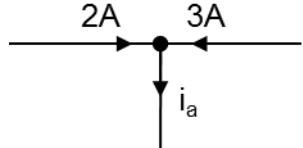
Auf dem Typenschild eines Wasserkochers ist eine Leistung von 1500 W bei 230 V Betriebsspannung angegeben. Berechnen sie Stromaufnahme und Widerstand des Wasserkochers.

$$I = \frac{P}{U} = \frac{1500}{230} = 6,52A \rightarrow R = \frac{230}{6,52} \approx 35,3\Omega$$

10. Knotenregel

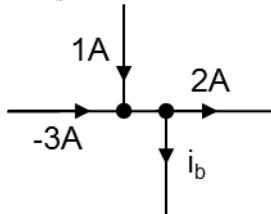
Bestimmen sie die unbekannten Ströme.

$$i_a = 5A$$



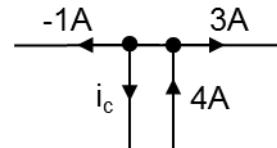
(a)

$$i_b = -4A$$



(b)

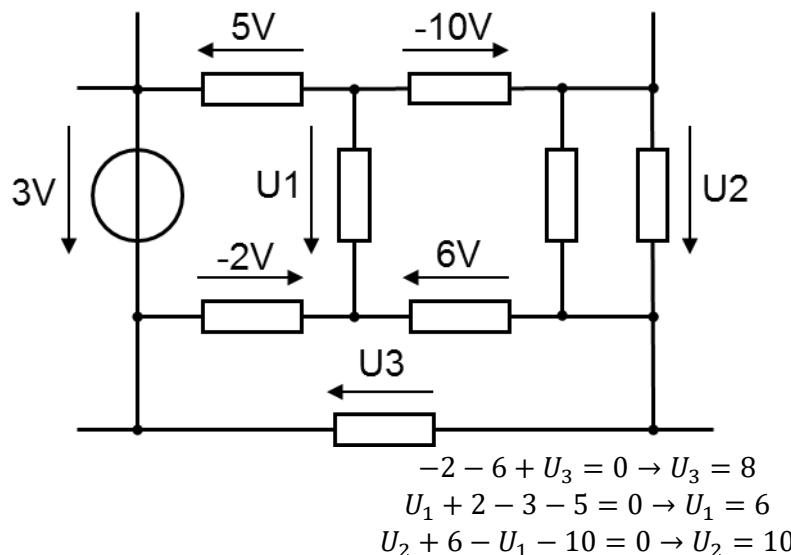
$$i_c = 2A$$



(c)

11. Maschenregel

Bestimmen sie U_1 , U_2 und U_3 .



12. Widerstand in einem Fernsehgerät

Ein $1\text{ k}\Omega$ Widerstand in einem Fernsehgerät hat eine maximal zulässige Leistung von $0,25\text{ W}$. Bei welcher Spannung und welchem Strom erreicht er seine Belastungsgrenze?

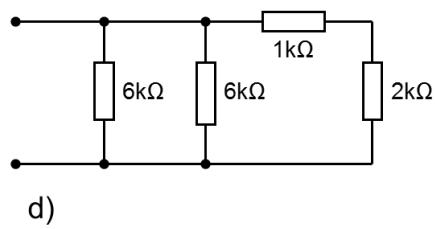
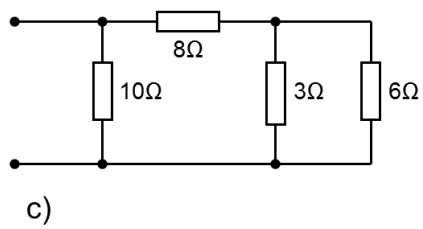
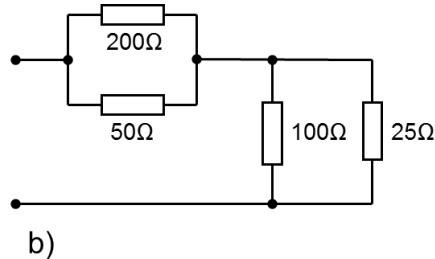
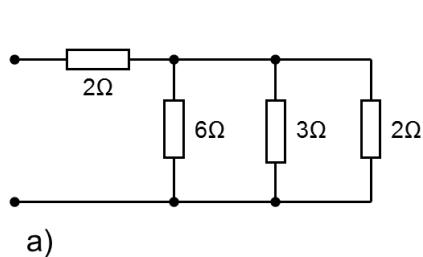
$$P = U * I = \frac{U^2}{R}$$

$$\rightarrow U_{max} = \sqrt{0,25 * 10^3} = 15,81\text{ V}$$

$$\rightarrow I_{max} = \frac{0,25}{5 * \sqrt{10}} = 15,81\text{ mA}$$

13. Ersatzwiderstände

Berechnen sie die Ersatzwiderstände der Schaltungen a) bis d).



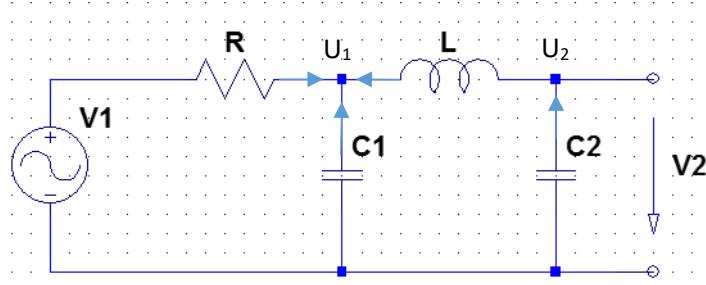
$$a) U_a = 2 + \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = 3\Omega$$

$$b) U_b = \frac{1}{\frac{1}{200} + \frac{1}{50}} + \frac{1}{\frac{1}{100} + \frac{1}{25}} = 60\Omega$$

$$c) U_c = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{8 + \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}}}} = \frac{1}{\frac{1}{10} + \frac{1}{8 + 2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 5\Omega$$

$$d) U_d = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{1+2}}}} = \frac{3}{2} k\Omega$$

14. RLC – Filter



a) Um welche Filtertype handelt es sich bei dieser Schaltung?

a Tiefpassfilter 3. Ordnung $\rightarrow -60\text{dB/dec}$ (Chebyshev)

b) Berechnen sie die Übertragungsfunktion $H(s) = V_2/V_1$ dieses Filters. (Sie können diese Aufgabe durch Anwendung der Spannungsteilerregel, durch Knotenpotentialanalyse oder durch Maschenstromanalyse lösen.)

$$U_1: I_R + I_{C1} + I_L = 0, \quad U_2: -I_L + I_{C2} = 0$$

$$I_R = \frac{U_e - U_1}{Z_R}, \quad I_{C1} = -\frac{U_1}{Z_{C1}}$$

$$I_L = \frac{U_2 - U_1}{Z_L}, \quad I_{C2} = -\frac{U_2}{Z_{C2}}$$

$$\begin{aligned}
\frac{U_e - U_1}{Z_R} - \frac{U_1}{Z_{C1}} + \frac{U_2 - U_1}{Z_L} = 0, \quad -\frac{U_2 - U_1}{Z_L} - \frac{U_2}{Z_{C2}} = 0 \\
U_1 * \left(-\frac{1}{Z_R} - \frac{1}{Z_{C1}} - \frac{1}{Z_L} \right) + U_2 * \frac{1}{Z_L} + U_e * \frac{1}{Z_R} = 0, \quad U_1 * \frac{1}{Z_L} + U_2 * \left(-\frac{1}{Z_L} - \frac{1}{Z_{C2}} \right) = \\
\Rightarrow U_1 = U_2 * \left(1 + \frac{Z_L}{Z_{C2}} \right) \\
\Rightarrow U_2 * \left(1 + \frac{Z_L}{Z_{C2}} \right) * \left(-\frac{1}{Z_R} - \frac{1}{Z_{C1}} - \frac{1}{Z_L} \right) + U_2 * \frac{1}{Z_L} + U_e * \frac{1}{Z_R} = 0 \\
\left(-\frac{1}{Z_R} - \frac{1}{Z_{C1}} - \frac{1}{Z_L} - \frac{Z_L}{Z_{C2}Z_R} - \frac{Z_L}{Z_{C2}Z_{C1}} - \frac{1}{Z_{C2}} + \frac{1}{Z_L} \right) * U_2 = -\frac{U_e}{Z_R} \\
\frac{U_2}{U_e} = \frac{1}{-Z_R * \left(-\frac{1}{Z_R} - \frac{1}{Z_{C1}} - \frac{Z_L}{Z_{C2}Z_R} - \frac{Z_L}{Z_{C2}Z_{C1}} - \frac{1}{Z_{C2}} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{Z_R}{Z_{C1}} + \frac{Z_L}{Z_{C2}} + \frac{Z_RZ_L}{Z_{C2}Z_{C1}} + \frac{Z_R}{Z_{C2}}} \\
= \frac{1}{1 + j\omega C_1 R - \omega^2 L C_2 - j\omega^3 R L C_1 C_2 + j\omega C_2 R}
\end{aligned}$$

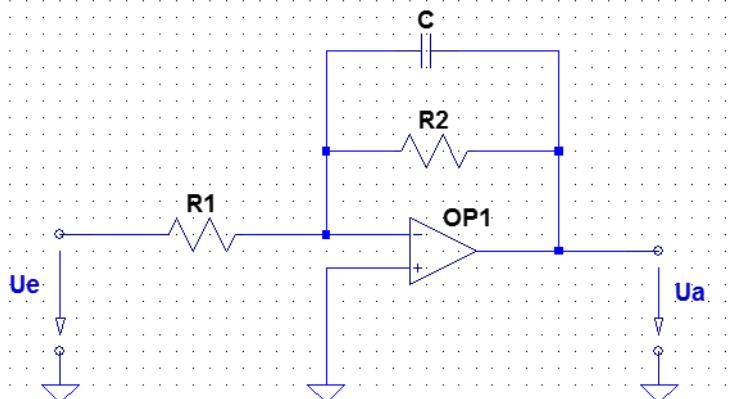
c) Berechnen sie den Betrag des Frequenzgangs $|H(j\omega)|$.

$$\left| \frac{1 - \omega^2 L C_2}{(1 - \omega^2 L C_2)^2 + \omega^2 R^2 (C_1 + C_2 - \omega^2 L C_1 C_2)^2} - j \frac{\omega R (C_1 + C_2 - \omega^2 L C_1 C_2)}{(1 - \omega^2 L C_2)^2 + \omega^2 R^2 (C_1 + C_2 - \omega^2 L C_1 C_2)^2} \right|$$

$$\begin{aligned}
|H(j\omega)| \\
= \sqrt{\left(\frac{1 - \omega^2 L C_2}{(1 - \omega^2 L C_2)^2 + \omega^2 R^2 (C_1 + C_2 - \omega^2 L C_1 C_2)^2} \right)^2 + \left(\frac{-\omega R (C_1 + C_2 - \omega^2 L C_1 C_2)}{(1 - \omega^2 L C_2)^2 + \omega^2 R^2 (C_1 + C_2 - \omega^2 L C_1 C_2)^2} \right)^2}
\end{aligned}$$

15. Integrator mit Operationsverstärker

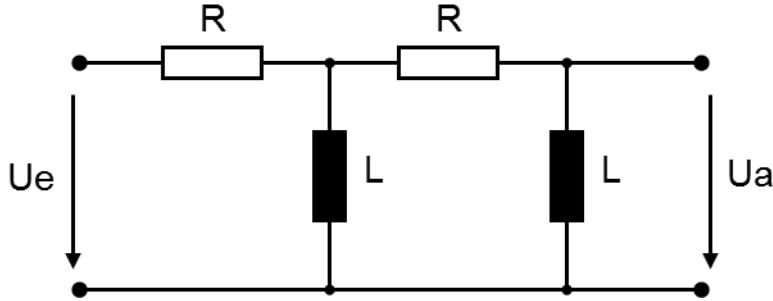
Berechnen sie den Frequenzgang $\underline{U}(j\omega)$ der Schaltung:



$$\frac{U_a}{U_e} = \frac{-\frac{1}{R_2 + j\omega C}}{\frac{1}{R_1}} = -\frac{R_2}{R_1 * (j\omega C R_2 + 1)} = -\frac{R_2}{R_1} * \frac{1}{j\omega C R_2 + 1}$$

16. Passives Filter

Um welche Filtertype handelt es sich? Berechnen sie die Systemfunktion $H(s)$. Verwenden sie dafür das Maschenstromverfahren.



RL-Hochpassfilter 2. Ordnung

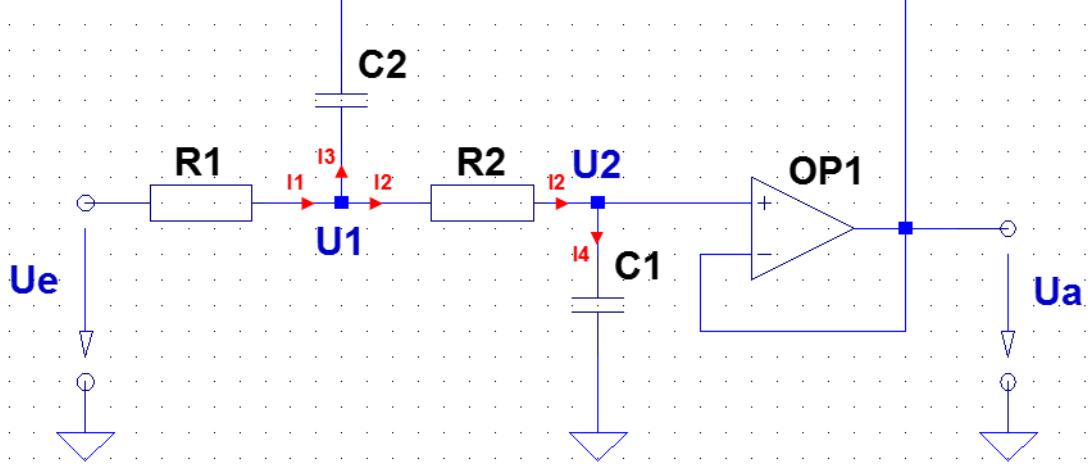
$$\begin{aligned} M_1: \quad & I_1 * (Z_{R1} + Z_{L1}) - I_2 * Z_{L1} = U_e \\ M_2: \quad & -I_1 * Z_{L1} + I_2 * (Z_{R2} + Z_{L2}) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{M_1} I_1 &= \frac{U_e + Z_{L1} * I_2}{Z_{R1} + Z_{L1}} \\ \xrightarrow{M_2} I_2 * \left(Z_{R2} + Z_{L2} - \frac{Z_{L1}^2}{Z_{R2} + Z_{L1}} \right) - \frac{Z_{L1} U_e}{Z_{R1} + Z_{L1}} &= 0 \\ I_2 &= \frac{Z_{L1} U_e}{\left(Z_{R2} + Z_{L2} - \frac{Z_{L1}^2}{Z_{R2} + Z_{L1}} \right) * (Z_{R1} + Z_{L1})} = \frac{Z_{L1} U_e}{Z_{R1} Z_{R2} + Z_{R2} Z_{L1} - Z_{L1}^2 + Z_{R1} Z_{L2} + Z_{L1} Z_{L2}} \\ &= \frac{s L_1 U_e}{R_1 R_2 + s(R_2 L_1 + R_1 L_2) + s^2(-L_1^2 + L_1 L_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_a &= Z_{L2} * I_2 = \frac{s^2 L_1 L_2 U_e}{R_1 R_2 + s(R_2 L_1 + R_1 L_2) + s^2(-L_1^2 + L_1 L_2)} \\ \frac{U_a}{U_e} &= \frac{s^2 L_1 L_2}{R_1 R_2 + s(R_2 L_1 + R_1 L_2) + s^2(-L_1^2 + L_1 L_2)} \\ \xrightarrow{\text{für } L_1=L_2 \text{ und } R_1=R_2} \frac{U_a}{U_e} &= \frac{s^2 L^2}{R^2 + s2RL + \underbrace{s^2(-L^2 + L^2)}_0} \end{aligned}$$

17. Sallen-Key-Tiefpassfilter

Berechnen sie die Übertragungsfunktion $H(s)$. Wenden sie das Knotenpotentialverfahren an.



$$I_1 - I_2 - I_3 = 0, \quad I_2 - I_4 = 0$$

$$I_1 = \frac{U_e - U_1}{R_1}, \quad I_2 = \frac{U_1 - U_2}{R_2}$$

$$I_3 = \frac{U_1 - U_2}{Z_{C2}}, \quad I_4 = \frac{U_2}{Z_{C1}}$$

$$\frac{U_e - U_1}{R_1} - \frac{U_1 - U_2}{R_2} - \frac{U_1 - U_2}{Z_{C2}} = 0, \quad \frac{U_1 - U_2}{R_2} - \frac{U_2}{Z_{C1}} = 0$$

$$U_1 * \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{Z_{C2}} \right) + U_2 * \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_{C2}} \right) + U_e * \frac{1}{R_1} = 0, \quad U_1 * \frac{1}{R_2} - U_2 * \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_{C1}} \right) = 0$$

$$\Rightarrow U_1 = \left(1 + \frac{R_2}{Z_{C1}} \right) * U_2$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{R_2}{Z_{C1}} \right) * \left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{Z_{C2}} \right) * U_2 + U_2 * \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_{C2}} \right) + U_e * \frac{1}{R_1} = 0$$

$$\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} - \frac{1}{Z_{C2}} - \frac{R_2}{R_1 Z_{C1}} - \frac{1}{Z_{C1}} - \frac{R_2}{Z_{C2} Z_{C1}} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{Z_{C2}} \right) * U_2 = -U_e * \frac{1}{R_1}$$

$$\frac{U_2}{U_e} = -\frac{\frac{1}{R_1}}{\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{R_2}{R_1 Z_{C1}} - \frac{1}{Z_{C1}} - \frac{R_2}{Z_{C2} Z_{C1}} \right)} = \frac{1}{1 + \frac{R_2}{Z_{C1}} + \frac{R_1}{Z_{C1}} + \frac{R_1 R_2}{Z_{C1} Z_{C2}}}$$

$$H(s) = \frac{1}{1 + sR_1C_1 + sR_1C_1 + s^2R_1R_2C_1C_2}$$

18. Matlab

Finden Sie mit Hilfe von Matlab die Systemfunktionen eines Besselfilters 5. Ordnung und eines Cauerfilters 5. Ordnung (Welligkeit im Durchlassbereich 3 dB, Sperrdämpfung mindestens 40 dB).

Anm.: Die grafischen Darstellungen der Netzwerkfunktionen lassen sich über entsprechende Menüpunkte nach Rechtsklick einstellen, um anschaulichere Darstellungen zu gewinnen.

Zeichnen Sie ein Bode-Diagramm des Bessel- und des Cauerfilters. Klicken Sie den Phasengang weg, zeichnen Sie ein Gitter, stellen Sie die Dämpfung von 0 bis – 60 dB ein. Wählen Sie für beide Filter denselben Frequenzbereich.

Vergleichen Sie die beiden Filterkennlinien.

Zeichnen Sie ein Pol-/Nullstellendiagramm des Cauerfilters. Wählen Sie denselben Maßstab für die reelle und die imaginäre Achse. Vergleichen Sie die Lage der Nullstellen im PN-Diagramm mit der Lage der Nullstellen im Bode-Diagramm.

Vergleichen Sie die Sprungantwort von Bessel- und Cauerfilter. Wählen Sie für beide Filter denselben Zeitbereich.

