5

[5] Gegeben sei die folgende – bereits geordnete – Stichprobe der Größe $n = 5$:

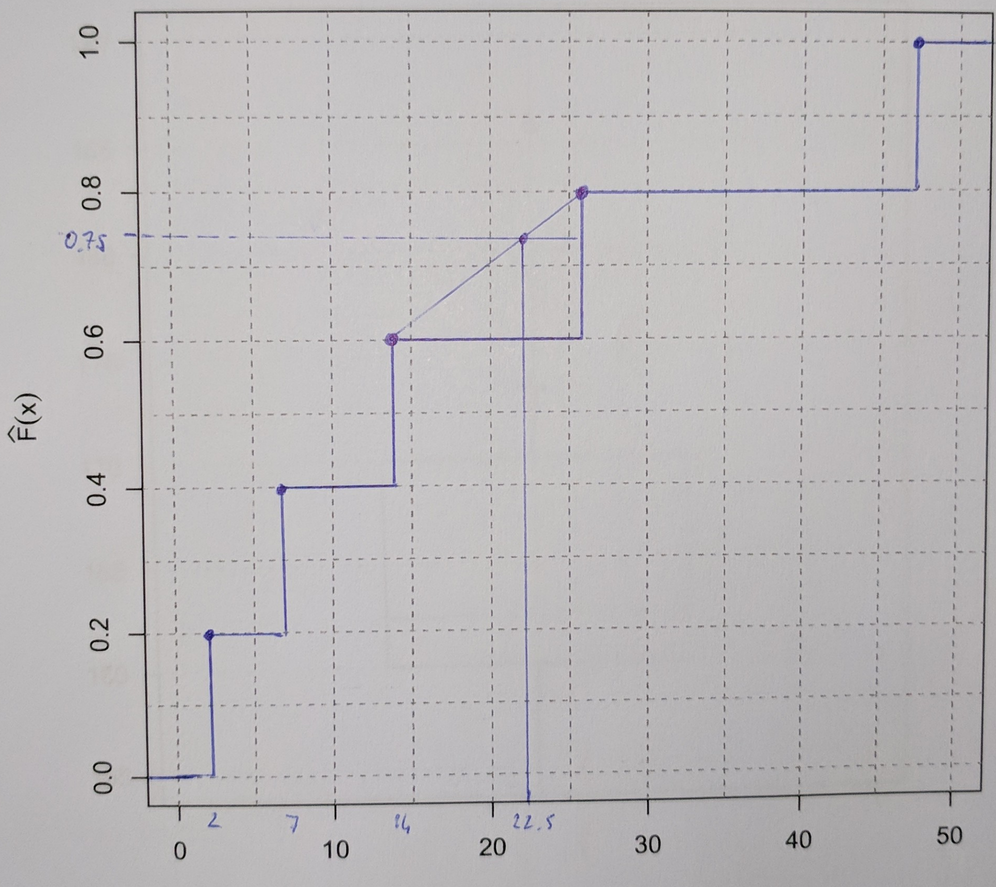
$$2 \quad 7 \quad 14 \quad 26 \quad 47$$

[2] Zeichnen Sie die empirische Verteilungsfunktion.

[1] Bestimmen Sie grafisch das 3. Quartil vom Typ 4.

[1] Bestimmen Sie den Stichprobenmittelwert.

[1] Bestimmen Sie die Stichprobenvarianz und -streuung.



$Q_3 \approx 22.5$

$$\bar{X}_n = \frac{2+7+14+26+47}{5} = \frac{96}{5} = 19.2$$

$$s_n^2 = \frac{1}{n-1} \cdot \left[(2-19.2)^2 + (7-19.2)^2 + (14-19.2)^2 + (26-19.2)^2 + (47-19.2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot (295.84 + 148.84 + 27.04 + 46.24 + 772.84) = \frac{1290.8}{4} = 322.7$$

$$s_n = \sqrt{s_n^2} = \sqrt{322.7} = 17.964$$

$4\frac{1}{2}$

[5] Gegeben sei die folgende – bereits geordnete – Stichprobe der Größe $n = 10$:

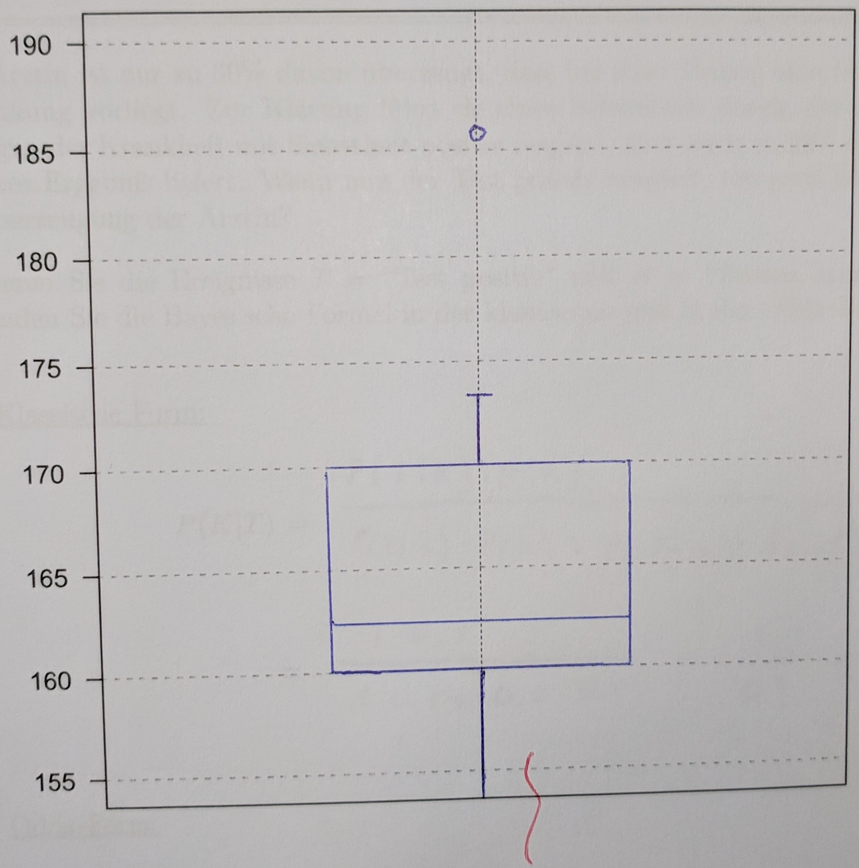
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x_{(i)}$	155	158	160	161	162	162	165	170	173	186

[1] Bestimmen Sie den Median.

[1] Bestimmen Sie die Hinges.

[1] Bestimmen Sie auf Basis der Hinges die Fences.

[2] Zeichen Sie den Boxplot der Daten.



Median = 162

lower Hinge = 160

upper Hinge = 170

lower Fence = 145

upper Fence = 185

$LF = Q_1 - 1.5(Q_3 - Q_1)$

$= 160 - 1.5(10)$

$= 145$

$UF = Q_3 + 1.5(Q_3 - Q_1)$

$= 170 + 1.5 \cdot 10$

$= 185$

2

[2] 2007 hatte Österreich etwa 8.28 Millionen Einwohner, 2017 etwa 8.77 Millionen. Das entspricht einer jährlichen Zunahme von:

$8.28 \cdot (1+p)^{10} = 8.77$

~~0.058 %~~ ☒ 0.58 % ☐ 5.8 %

$\cancel{\sqrt[10]{\frac{8.77}{8.28}}}$ $\frac{8.77}{8.28} = (1+p)^{10}$

$\ln \frac{8.77}{8.28} = 10 \cdot \ln(1+p) \mid \sqrt[10]{\frac{8.77}{8.28}} - 1$

Begründung:

✓ p ... jährliche Zunahme

$8.28 \cdot (1+p)^{10} = 8.77$

$\Rightarrow p = \sqrt[10]{\frac{8.77}{8.28}} - 1 = 0.005765 \approx 0.58\%$

$2\frac{1}{2}$

[3] Eine Ärztin ist nur zu 50% davon überzeugt, dass bei einer Person eine bestimmte Erkrankung vorliegt. Zur Klärung führt sie einen Schnelltest durch, der zwar bei Vorliegen der Krankheit mit Sicherheit positiv reagiert, aber auch zu 20% ein falsch positives Ergebnis liefert. Wenn nun der Test positiv reagiert, wie groß ist danach die Überzeugung der Ärztin?

Definieren Sie die Ereignisse T = "Test positiv" und K = "Person krank" und verwenden Sie die Bayes'sche Formel in der klassischen und in der Odds–Form.

[2] Klassische Form:

$P(T|K^c) = 0.2$

$P(T|K) = 1$

$P(K) = 0.5$

$$P(K|T) = \frac{P(T|K) \cdot P(K)}{P(T|K) \cdot P(K) + P(T|K^c) \cdot P(K^c)}$$

$$= \frac{1 \cdot 0.5}{1 \cdot 0.5 + 0.2 \cdot 0.5} = \frac{0.5}{0.6} = \boxed{0.833}$$

✓

[1] Odds–Form:

$$\underbrace{\frac{P(K|T)}{P(K^c|T)}}_{\text{A-posteriori–Odds}} = \underbrace{\frac{P(K)}{P(K^c)}}_{\text{A-priori–Odds}} \times \underbrace{\frac{P(T|K)}{P(T|K^c)}}_{\text{Likelihood Quotient}} =$$

?

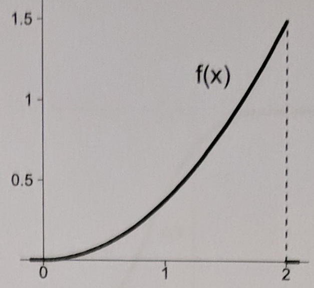
$$\Longrightarrow P(K|T) = \frac{P(K)}{P(K^c)} \cdot \frac{P(T|K)}{P(T|K^c)} \cdot P(K^c|T)$$

$$= \frac{0.5}{0.5} \cdot \frac{1}{0.2} \cdot 0.1667 = \boxed{0.833}$$

$4\frac{1}{2}$

[5] Die Dichte einer sG X ist gegeben wie folgt:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{8} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Bestimmen Sie von X:

[1] den Erwartungswert

[2] die Varianz

[1] die Verteilungsfunktion

$E(x^2) = \int_0^2 x^2 \cdot \frac{3x^2}{8}\, dx = \int_0^2 \frac{3x^4}{8}\, dx = \left[\frac{3x^5}{40}\right]_0^2 = \frac{96}{40}$

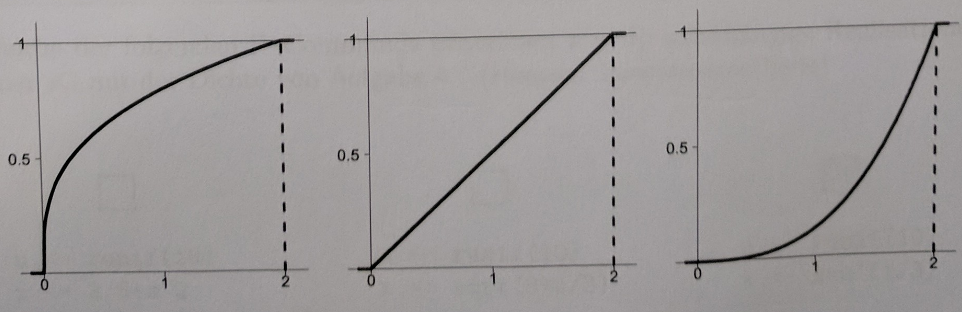
$E(x)^2 = 2.25$

$E(x) = \int_0^2 x \frac{3x^2}{8}\, dx = \int_0^2 \frac{3x^3}{8}\, dx = \left[\frac{3x^4}{32}\right]_0^2 = \frac{48}{32} = 1.5$

$Var(x) = E(x^2) - E(x)^2 \approx 2.4 - 2.25 = 0.15$ ✓

Vert. Fkt.: $F(x) = \int_0^x \frac{3t^2}{8}\, dt = \left[\frac{3t^3}{24}\right]_0^x = \frac{3x^3}{24} = \frac{x^3}{8}$ für...

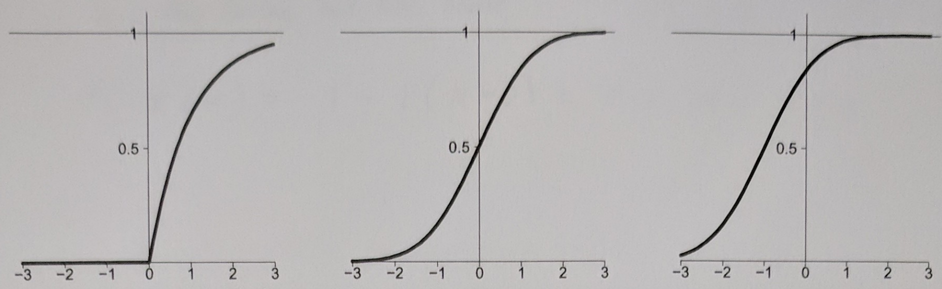
[1] Welche der folgenden Abbildungen zeigt die Verteilungsfunktion von X?



☐ ☐ ☒ ✓

1

[1] Welche der folgenden Abbildungen zeigt die Verteilungsfunktion einer Standardnormalverteilung?



☐ ☒ ☐

✓

1

[2] Wenn X die Dichte $f_X(x) = I_{(0,1)}(x)$ hat, wie lautet die Dichte von $Y = \sqrt{X}$?

$y = \rho(x)$

$\rho^{-1}(y) = y^2$

Jacobian: $J =$ $2y$ ✓ $\qquad f_Y(y) =$ $\sqrt{y^2} \cdot 2y = 2y^2$

1

[1] Wenn die Seitenlänge X eines Quadrats zwischen 0 und 10 stetig uniform verteilt ist, was kann man für die Länge der Diagonale erwarten?

$f(x) = \frac{1}{10}$ $\qquad X \sim U(0, 10)$ $\qquad$ Diagonale $D = \sqrt{2x^2} = \sqrt{2}\,x$

$\Rightarrow E(D) = \int_0^{10} \sqrt{2}\,x \cdot \frac{1}{10}\,dx = \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \int_0^{10} x = \frac{\sqrt{2}}{10} \cdot \left(\frac{100}{2}\right) = 7.071$ ✓

1

[1] Welche der folgenden R–Commands generieren $n = 10$ unabhängige Realisationen einer sG mit der Dichte von Aufgabe 4? (Hinweis: Inversionsmethode)

$f(x) = \frac{3x^2}{8}$

$F(x) = \frac{x^3}{8}$

$u = \frac{x^3}{8}$

$x = \sqrt[3]{8u}$

$= 2 \cdot \sqrt[3]{u}$

☐
```
u <- runif(10)
x <- 3/8*u^2
```

☐
```
u <- runif(10)
x <- sqrt(8*u/3)
```

☒
```
u <- runif(10)
x <- 2*u^(1/3)
```
✓

1

[1] Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den 100 Personen, die an der Prüfung teilnehmen, zumindest eine Person heute Geburtstag hat? (Hinweis: Rechnen Sie exakt oder mit der approximierenden Poissonverteilung.)

X... Anz Personen mit Geb. heute $\quad P(X=0) = \left(\frac{364}{365}\right)^{100} = 0.76$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - 0.76 = 0.24$ ✓

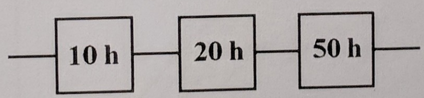
$\frac{1}{2}$

[1] Wenn für eine normalverteilte sG $X \sim \mathsf{N}(5, \sigma^2)$ das 90%–Quantil den Wert 8.845 hat, wie groß ist dann die Streuung σ?

$z_{0.9} = 8.845 \qquad P(X \leq 8.845) = 0.9 \qquad \frac{x-\mu}{\sigma}$

1

[3] Die logische Struktur eines Systems sei gegeben wie folgt:



Die Lebensdauern X_i, $i = 1, 2, 3$, der Komponenten seien unabhängig exponentialverteilt mit den in der Abbildung angegebenen Mittelwerten. Bestimmen Sie für die Lebensdauer X des Systems:

[1] die Verteilungsfunktion

[1] die Dichte (wie ist X verteilt?)

[1] Mittelwert und Streuung

$F_1(x) = 1 - e^{-10x} \qquad F_2(x) = 1 - e^{-20x} \qquad F_3(x) = 1 - e^{-50x}$

Vert. Fkt.: $F(x) = 1 - \prod_{i=1}^{3} (1 - F_i(x)) = 1 - (e^{-10x} \cdot e^{-20x} \cdot e^{-50x})$

$= 1 - e^{-80x}$

Dichte: $f(x) = F'(x) = 80 \cdot e^{-80x} \qquad X \sim Exp(\lambda = 80)$

Mittelwert: $E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{80}$

Streuung: $\sqrt{Var(X)} = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{80}$

22-3-2018

1

[1] Zwischen zwei sGn X und Y bestehe die Beziehung $Y = -X/5$. Dann ist der Korrelationskoeffizient ρ von X und Y gegeben durch:

☒ -1 ✓ ☐ $-\frac{1}{5}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{5}$ ☐ 1

3

[3] Der stochastische Vektor (X, Y) sei bivariat normalverteilt:

$$(X,Y) \sim \mathsf{N}_2\left(\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 0,\ \sigma_1^2 = 1,\ \sigma_2^2 = 1,\ \rho = 2/3\right)$$

$\mu_2 + \rho \frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x - \mu_1)$

[1] Wie lauten die beiden Regressionsgeraden?

$\mu_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y - \mu_2)$

$0 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot x$

$$\mathbb{E}(Y|X = x) = \frac{2}{3}x \qquad \mathbb{E}(X|Y = y) = \frac{2}{3}y$$ ✓

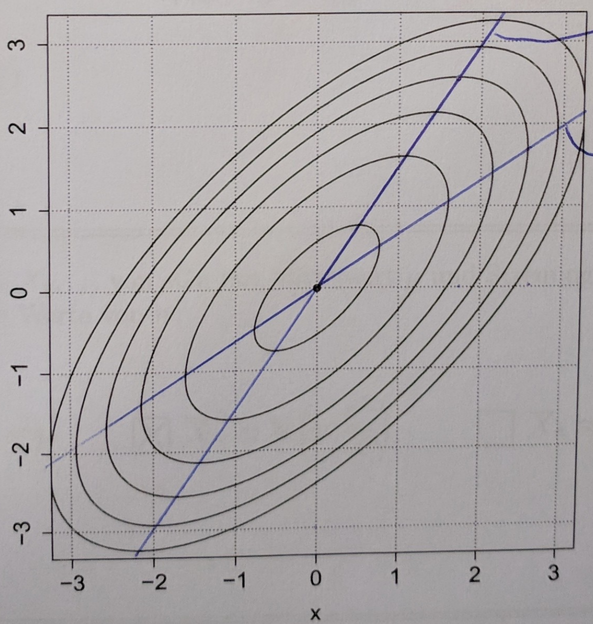
$= \frac{2}{3}x$

[2] Die folgende Abbildung zeigt einige Contourlinien der obigen bivariaten Normalverteilung. Zeichnen Sie die Regressionsgeraden ein.

$y = \frac{2}{3}x$

$x = y \cdot \frac{3}{2}$

$E(X|Y=y)$



$E(Y|X=x)$

✓

$\tan\theta = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \cdot \frac{1-\rho^2}{\rho}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{0.555 \cdot 3}{2}$

$= 0.41625$

$\Rightarrow \theta = 22.6°$

– [1] $X_1, X_2, \ldots, X_{10}$ seien zehn unabhängige und identisch nach $\mathsf{N}(0,1)$ verteilte sGn. Dann gilt für die Verteilung von $\overline{X} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} X_i$:

☒ $\overline{X} \sim \mathsf{N}(0,1)$ ☐ $\overline{X} \sim \mathsf{N}\left(0, \frac{1}{10}\right)$ ☐ $\overline{X} \sim \mathsf{N}\left(0, \frac{1}{100}\right)$

22-3-2018

Aufgabe 8

1

[1] Für eine iid-Folge $X_1, X_2, \ldots$ von nach $\mathsf{Exp}(\lambda)$ verteilten sGn besagt das schGGZ, dass für $n \longrightarrow \infty$:

☐ $\overline{X}_n \xrightarrow{P} 0$ ☐ $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \lambda$ ☒ $\overline{X}_n \xrightarrow{P} \frac{1}{\lambda}$

✓

1

[2] Ein binärer Kommunikationskanal überträgt eine Folge von Bits (0 und 1). Für jedes übertragene Bit gibt es eine 10% Chance, dass ein Fehler auftritt (d. h., 0 wird zu 1, 1 zu 0). Wenn 1000 Bits übertragen werden und Bitfehler unabhängig voneinander auftreten, mit welcher (approximativen) Wahrscheinlichkeit gibt es höchstens 125 Übertragungsfehler? (**Hinweis:** ZGVS mit Stetigkeitskorrektur)

$P(X \le 125) = ?$

$X \ldots$ Anz. Fehler $\quad X \sim B(1000, 0.1) \quad E(X) = 100 \quad Var(X) = 90$

$\sigma = \sqrt{90}$

$$Z = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu \cdot n}{\sigma \sqrt{n}} \Rightarrow \frac{125.5 - 100}{\sqrt{90} \cdot \cancel{\sqrt{1000}}} = \underline{0{,}085}$$

$P(X \le 125) = \phi(0.085) \approx \underline{0.5319}$

1

[1] Für eine iid-Folge $X_1, X_2, \ldots$ von sGn mit Mittelwert μ und Streuung σ besagt der ZGVS, dass für große Werte von n:

☐ $\overline{X}_n \approx \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ ☒ $\overline{X}_n \approx \mathsf{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ ☐ $\overline{X}_n \approx \mathsf{N}(0, 1)$

✓

3

1

[1] Auf Basis einer Stichprobe $X_1, X_2, \ldots, X_n$ von $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ ist der ML-Schätzer von σ^2 gegeben durch:

☒ $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ ☐ $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ ☐ $\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$

✓

3

[3] Für zwei Stichproben x (Umfang = 10) und y (Umfang = 10) aus unabhängigen Normalverteilungen, $X \sim \mathsf{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ bzw. $Y \sim \mathsf{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$, ergibt der R–Befehl `t.test(x, y, var.equal=TRUE)` den folgenden Output:

```
        Two Sample t-test

data:  x and y
t = 1.945, df = 18, p-value = 0.06762
alternative hypothesis: true difference in means is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 -0.3753  9.7131
sample estimates:
mean of x mean of y
    102.6      97.9
```

[1] Welche Annahme wird hinsichtlich der beiden Varianzen getroffen?

☒ $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ☐ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

[1] Welche Hypothesen werden gegeneinander getestet?

$\mathcal{H}_0$: $\mu_1 = \mu_2$ gegen $\mathcal{H}_1$: $\mu_1 \neq \mu_2$

[1] Wie lautet die Testentscheidung zum (üblichen) Niveau $\alpha = 5\%$?

☐ $\mathcal{H}_0$ verwerfen! ☒ $\mathcal{H}_0$ nicht verwerfen! ✓

1

[2] Von einer Stichprobe aus einer Normalverteilung $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ ist Folgendes bekannt:

$$n = 8, \quad \overline{x} = 21.4, \quad s = 8.3$$

Bestimmen Sie ein 95%–Konfidenzintervall für den Mittelwert μ.

t!

$\bar{x} \pm z_{1-\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$

$T_1 = \bar{x} - z_{0.95} \frac{s}{\sqrt{n}} = 21.4 - 1.6449 \cdot \frac{8.3}{\sqrt{8}}$

$\Rightarrow T_1 = 16.573$

$T_2 = \bar{x} + z_{0.95} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 21.4 + 1.6449 \cdot \frac{8.3}{\sqrt{8}} = 26.227$

Konfidenzintervall: $(16.573, 26.227)$

1

[1] Wenn man einen Würfel 50 Mal wirft und 30 gerade und 20 ungerade Augenzahlen bekommt, lässt sich dann behaupten, dass der Würfel ausbalanciert ist? (Hinweis: Chiquadrat-Anpassungstest mit $\alpha = 5\%$.)

$n = 50 \quad \alpha = 0.05$

gerade	30	0.5	25	1
ungerade	20	0.5	25	1
	x_i	p_{i0}	np_{i0}	

$2 = Q_1$

$\chi^2_{1,0.95} = 3.841$ ✓

$3.841 > 2 \Rightarrow H_0$ nicht verwerfen

$\Rightarrow$ Würfel ist ausbalanciert

$1\frac{1}{2}$

[2] Mit einer neuen Behandlungsmethode will man eine Erfolgsrate θ von mehr als 70% erreichen. Dazu testet man $\mathcal{H}_0 : \theta \leq \theta_0 = 0.7$ gegen $\mathcal{H}_1 : \theta > \theta_0$. Wenn nun in einer Studie mit 100 Probanden die neue Methode bei 80 Personen erfolgreich ist, welche der folgenden Wahrscheinlichkeiten ist dann der p–Wert? Interpretation?

$P(x \geq 80)$

☐ `pbinom(80,100,0.7)` `[1] 0.9911`

☐ `dbinom(80,100,0.7)` `[1] 0.007576`

☒ `1-pbinom(79,100,0.7)` `[1] 0.01646` ✓

p ist Die Wahrscheinlichkeit, den beobachteten Wert (80) oder einen größeren Wert (>80) zu bekommen.

–

[1] Wie lautet in der Situation der vorhergehenden Aufgabe das 95% Wald–Intervall für die Erfolgsrate θ?

$\hat{p} \pm z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

0.0414

0.024938

?

$0.01646 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.01646 \cdot (1-0.01646)}{100}}$

Intervall: $(-0.008478, 0.0414)$

[1] Wenn man in der Situation der vorherigen Aufgabe a–priori von einer Betaverteilung Be(3, 3) für die Erfolgsrate θ ausgeht, welcher der folgenden Ausdrücke ist dann der (a–posteriori) Bayes–Schätzwert von θ?

☐ $\frac{3}{3+3} = 0.5$ ☐ $\frac{3+80}{3+3+100} = 0.783$ ☐ $\frac{80}{100} = 0.8$