Runde 10, Beispiel 69

LVA 118.181, Übungsrunde 10, 19.01.2007

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 18.01.2007

1 Angabe

Man löse mit Hilfe der Fourier-Transformation folgende Integralgleichung vom Fredholm-Typ für $x(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t-\tau|} x(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau = \frac{1}{1+t^2}$$

2 Lösung von Intgralgleichungen mit $\mathcal{F}$-Transformation

Die im Gegensatz zur $\mathcal{L}$-Transformation anmdere Form des Faltungsproduktes ermöglicht die Lösung von Integralen vom Fredholm-Typ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)x(\tau)\,\mathrm{d}\,\tau - \lambda x(t) = f(t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Wenn alle Funktionen absolut integrierbar sind, lautet die Gleichung für die zugehörigen Spektralfunktionen:

$$K(\omega)X(\omega) - \lambda X(\omega) = F(\omega)$$

Wenn $x(t)$ dem Umkehr und Eindeutigkeitssatz genügt, erhält man die Lösung $X(\omega)$ dieser Gleichung mit der inversen $\mathcal{F}$-Transformation als Lösung der Integralgleichung

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{K(\omega)-\lambda} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega$$

3 Lösung des Beispiels

Zunächst berechnen wir aus $k(t) = e^{-|t|}$

$$\mathcal{F}\{e^{-|t|} = \frac{2}{1+\omega^2}$$

(Basierend auf der folgenden Formel $\mathcal{F}\{e^{-at}\} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$).
$x(r)$ berechnen wir nun durch das Einsetzen in die Formel:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega)}{\frac{2}{1+\omega^2}} e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)(1-\omega^2)e^{i\omega t}\,\mathrm{d}\,\omega$$

ω^2 bedeutet, dass eine zweite Ableitung vorliegt ($f(t)$ muss zweimal differenzietbar sein) und es gilt daher fortgesetzt:

$$\frac{1}{2}f(r) - \frac{1}{2}f''(t)$$

Somit müssen wir die zweite Ableitung von $f(t)$ bilden:

$$f(t) = \frac{1}{1+t^2}$$
$$f(t)' = -\frac{2*t}{(1+t^2)^2}$$
$$f(t)'' = \frac{8t^2}{(1+t^2)^3} - \frac{2}{(1+t^2)^2}$$