5. Übung - Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

Felix Knorr (1325541) - e1325541@student.tuwien.ac.at

21. November 2014

1. Bestimmen Sie Erwartung und Varianz der Betaverteilung erster Art.

   Betaverteilung erster Art $B_1(\alpha, \beta) : f(x) = \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{B_1(\alpha,\beta)}$

   Additionstheorem für Gammaverteilung: $B_1(\alpha, \beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x{\cdot}f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha}(1-x)^{\beta-1}}{B_1(\alpha,\beta)}\,dx = \int_0^1 \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)}{B_1(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta+1)}\,dx = \frac{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{B_1(\alpha,\beta)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\alpha B_1(\alpha,\beta)}{B_1(\alpha,\beta)(\alpha+\beta)} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2{\cdot}f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{x^{\alpha+1}(1-x)^{\beta-1}}{B_1(\alpha,\beta)}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta)}{B_1(\alpha,\beta)\Gamma(\alpha+\beta+2)} = \frac{(\alpha+1)\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{B_1(\alpha,\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{(\alpha+1)\alpha B_1(\alpha,\beta)}{B_1(\alpha,\beta)(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)} = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta)^2+\alpha+\beta}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(\alpha+1)\alpha}{(\alpha+\beta)^2+\alpha+\beta} - \frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2} = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta+1)(\alpha+\beta)^2}$$

2. X und Y seien unabhängig mit Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$ bzw. $\Gamma(\beta, \lambda)$. Bestimmen Sie die Verteilung $X + Y$.

   Gammaverteilung: $\Gamma(\alpha, \lambda) \sim \dfrac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$

   Betafunktion: $B(\alpha, \beta) = \int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} = \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad \Rightarrow \quad \int\limits_0^1 \dfrac{x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} = \dfrac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}$

   Gammafunktion: $\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt \quad \Rightarrow \quad \Gamma(x+y) = \int\limits_0^\infty t^{x+y-1}\mathrm{e}^{-t}dt$

   Berechnung:

$$f_{X+Y}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u)f_Y(z-u)\,du = \int_0^{\infty} \frac{u^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda u}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(z-u)^{\beta-1}\lambda^{\beta}e^{-\lambda(z-u)}}{\Gamma(\beta)}\,du$$

$$= \int_0^z \frac{u^{\alpha-1}\lambda^{\alpha+\beta}e^{-\lambda z}(z-u)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,du$$

   Substitution: $u = zw \quad \dfrac{du}{dw} = z \quad \Rightarrow \quad du = z \cdot dw$

$$= \int_0^1 \frac{\lambda^{\alpha+\beta}e^{-\lambda z}z^{\alpha-1}z^{\beta-1}w^{\alpha-1}(1-w)^{\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} z\,dw = \frac{\lambda^{\alpha+\beta}e^{-\lambda z}z^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} \sim \Gamma(\alpha+\beta, \lambda)$$

3. X und Y seien unabhängig mit Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \lambda)$ bzw. $\Gamma(\beta, \lambda)$. Bestimmen Sie die Verteilung X/Y.

   Gammaverteilung: $\Gamma(\alpha, \lambda) \sim \dfrac{x^{\alpha-1}\lambda^{\alpha}e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}$

   B_2-Verteilung: $B_2(\alpha, \beta) \sim \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)} \dfrac{x^{\alpha-1}}{(1+x)^{\alpha+\beta}}$

Betafunktion: $B(\alpha,\beta)=\dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \quad\Rightarrow\quad \dfrac{1}{B(\alpha,\beta)}=\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}$

Gammafunktion: $\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}dt \quad\Rightarrow\quad \Gamma(x+y)=\int\limits_0^\infty t^{x+y-1}\mathrm{e}^{-t}dt$

Berechnung:

$$f_{x/y}(z)=\int_0^\infty f_x(yz)f_y(y)\,|y|\,dy=\int_0^\infty y\frac{(yz)^{\alpha-1}\lambda^\alpha e^{-\lambda yz}}{\Gamma(\alpha)}\frac{y^{\beta-1}\lambda^\beta e^{-\lambda y}}{\Gamma(\beta)}\,dy=\frac{\lambda^{\alpha+\beta}z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty y^{\alpha+\beta-1}e^{-\lambda y(1+z)}\,dy$$

Substitution $u=\lambda y(1+z)$ $\quad\left(y=\dfrac{u}{\lambda(1+z)}\right)\quad\Rightarrow\quad \dfrac{du}{dy}=\lambda(1+z)\quad\Rightarrow\quad dy=\dfrac{du}{\lambda(1+z)}$

$$=\frac{\lambda^{\alpha+\beta}z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\left(\frac{u}{\lambda(1+z)}\right)^{\alpha+\beta-1}e^{-\lambda u}\,\frac{du}{\lambda(1+z)}=\frac{\lambda^{\alpha+\beta}z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\frac{u^{\alpha+\beta-1}e^{-\lambda u}}{\lambda^{\alpha+\beta-1}(1+z)^{\alpha+\beta-1}\lambda(1+z)}\,du$$

$$=\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^\infty\frac{u^{\alpha+\beta-1}e^{-\lambda u}}{(1+z)^{\alpha+\beta}}\,du=\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{(1+z)^{\alpha+\beta}}=\frac{1}{B(\alpha,\beta)}\frac{z^{\alpha-1}}{(1+z)^{\alpha+\beta}}\sim B_2(\alpha,\beta)$$

4. X ist normalverteilt mit Mittel 3 und Varianz 7. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}(X<2)$, $\mathbb{P}(X>5)$ und $\mathbb{P}(0<X<7)$.

$$X\sim N(\mu,\sigma^2)\quad\Rightarrow\quad \mathbb{P}(x_1\le X\le x_2)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Da die Funktion stetig ist es egal ob $<$ oder $\le$

$$\mathbb{P}(-\infty<X\le 2)=\int_{-\infty}^{2}\frac{1}{\sqrt{14\pi}}e^{\frac{(x-3)^2}{14}}\,dx=0.35$$

$$\mathbb{P}(5\le X\le\infty)=\int_5^\infty\frac{1}{\sqrt{14\pi}}e^{\frac{(x-3)^2}{14}}\,dx=0.22=\Phi(\frac{5-3}{\sqrt7})=1-\Phi(\frac{2}{\sqrt7})=1-0.648=0.352$$

$$\mathbb{P}(0\le X\le 7)=\int_0^7\frac{1}{\sqrt{14\pi}}e^{\frac{(x-3)^2}{14}}\,dx=0.81$$

Diese Methode funktioniert händisch nicht, da sie auf eine nichtelementare Stammfunktion führt, händische Methode im Folgenden (Werte von Φ stehen in Standardnormalverteilungstabelle):

$$\mathbb{P}(X\le x)=\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sqrt{\sigma^2}}\right)=\Phi\left(\frac{x-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)}}\right)\qquad \Phi(-x)=1-\Phi(x)$$

$$\mathbb{P}(X>x)=1-\mathbb{P}(x\le X)\qquad \mathbb{P}(x<X<y)=\mathbb{P}(X<y)-\mathbb{P}(X<x)$$

$$\mathbb{P}(X<2)=\Phi(\frac{2-3}{\sqrt7})=1-\Phi(\frac{1}{\sqrt7})=1-0.648=0.352$$

$$\mathbb{P}(X>5)=\Phi(\frac{5-3}{\sqrt7})=1-\Phi(\frac{2}{\sqrt7})=1-0.776=0.224$$

$$\mathbb{P}(0\le X\le 7)=\Phi(\frac{7-3}{\sqrt7})-\Phi(\frac{0-3}{\sqrt7})=\Phi(\frac{4}{\sqrt7})-1+\Phi(\frac{3}{\sqrt7})=0.805$$

5. X sei standard-normalverteilt. Bestimmen Sie $M(t)=\mathbb{E}(e^{tx})$.

$$\mathbb{E}(e^{tx})=\int_{-\infty}^\infty e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx=\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac12(x^2-tx+t^2-t^2)}\,dx=e^{\frac{t^2}{2}}\underbrace{\int_{-\infty}^\infty\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-t)^2}{2}}\,dx}_{=1\text{ (Std Normalvtlg)}}=e^{\frac{t^2}{2}}$$

6. X hat die Laplace-Verteilung (oder doppelte Exponentialverteilung) mit der Dichte $f(x)=\dfrac12 e^{-|x|}$. Bestimmen Sie $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{E}(X^2)$ und $M(t)=\mathbb{E}(e^{tX})$.

$$\mathbb{E}(X)=\frac12\int_{-\infty}^\infty x\cdot e^{-|x|}\,dx=0\quad\text{(1 mal partiell integrieren)}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot e^{-|x|}\; dx = 2 \quad \text{(2 mal partiell integrieren)}$$

$$\mathbb{E}(e^{tx}) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-|x|}\; dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x(t+1)}\; dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{x(t+1)}\; dx = \frac{e^{x(t+1)}}{2(t+1)}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{e^{x(t-1)}}{2(t-1)}\Big|_{0}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t-1)} = \frac{t}{(t+1)(t-1)} = \frac{1}{1-t^2} \qquad \text{für } -1 < t < 1 \text{ ansonsten } \infty$$

7. Die Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung: wenn T exponentialverteilt ist, dann gilt für $s, t > 0$

$$\mathbb{P}(T > s + t | T > s) = \mathbb{P}(T > t)$$

(wenn T als Wartezeit interpretiert wird, dann kann man die linke Seite als die Wahrscheinlichkeit ansehen, dass die restliche Wartezeit größer als t ist, wenn schon s Stunden gewartet wurde - diese restliche Wartezeit ist in diesem Fall genauso verteilt wie T selbst, die Exponentialverteilung hat also "vergessen", wie lange schon gewartet wurde).

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad \Rightarrow \quad F(x) = \int_0^x f_\lambda(t)\; dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

$$\mathbb{P}(T > s + t | T > s) = \frac{\mathbb{P}(T > s + t)}{\mathbb{P}(T > s)} = \frac{1 - \mathbb{P}(T \leq s + t)}{1 - \mathbb{P}(T \leq s)} = \frac{1 - (1 - e^{-\lambda s + t})}{1 - (1 - e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda s + t}}{e^{-\lambda s}}$$

$$= \frac{e^{-\lambda s} e^{-\lambda t}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = \mathbb{P}(T > t)$$