6. Übung - Wahrscheinlichkeit und stochastische Prozesse

Felix Knorr (1325541) - e1325541@student.tuwien.ac.at

7. Dezember 2014

1. Bestimmen Sie für eine Zufallsvariable $X \sim B(40, 1/2)$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $[X \leq 8]$, $[X \leq 11]$, $[X \leq 14]$, $[X \leq 17]$ und $[X \leq 20]$

   - Exakt

$$B(x|p,n) = \mathbb{P}(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{P}(X \leq 8) = \binom{40}{0} \underbrace{0.5^0 0.5^{40}}_{0.5^{40}} + \binom{40}{1} \underbrace{0.5^1 0.5^{39}}_{0.5^{40}} + \ldots + \binom{40}{8} \underbrace{0.5^8 0.5^{32}}_{0.5^{40}} = 0.00009$$

$$\mathbb{P}(X \leq 11) = \binom{40}{0} \underbrace{0.5^0 0.5^{40}}_{0.5^{40}} + \binom{40}{1} \underbrace{0.5^1 0.5^{39}}_{0.5^{40}} + \ldots + \binom{40}{11} \underbrace{0.5^{11} 0.5^{29}}_{0.5^{40}} = 0.003$$

$$\mathbb{P}(X \leq 14) = \binom{40}{0} \underbrace{0.5^0 0.5^{40}}_{0.5^{40}} + \binom{40}{1} \underbrace{0.5^1 0.5^{39}}_{0.5^{40}} + \ldots + \binom{40}{14} \underbrace{0.5^{14} 0.5^{26}}_{0.5^{40}} = 0.040$$

$$\mathbb{P}(X \leq 17) = \binom{40}{0} \underbrace{0.5^0 0.5^{40}}_{0.5^{40}} + \binom{40}{1} \underbrace{0.5^1 0.5^{39}}_{0.5^{40}} + \ldots + \binom{40}{17} \underbrace{0.5^{17} 0.5^{23}}_{0.5^{40}} = 0.215$$

$$\mathbb{P}(X \leq 20) = \binom{40}{0} \underbrace{0.5^0 0.5^{40}}_{0.5^{40}} + \binom{40}{1} \underbrace{0.5^1 0.5^{39}}_{0.5^{40}} + \ldots + \binom{40}{20} \underbrace{0.5^{20} 0.5^{20}}_{0.5^{40}} = 0.563$$

   - mit der Normalapproximation ohne Stetigkeitskorrektur

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) \qquad \mu = n \cdot p \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \qquad \left(\sigma^2 = \mathbb{V}(X) = np(1-p)\right)$$

$$\Phi\left(\frac{x - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{x-20}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 8) = \Phi\left(\frac{8-20}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{12}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(3.795) = 1 - 0.99993 = 0.00007$$

$$\mathbb{P}(X \leq 11) = \Phi\left(\frac{11-20}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{9}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(2.846) = 1 - 0.998 = 0.002$$

$$\mathbb{P}(X \leq 14) = \Phi\left(\frac{14-20}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(1.897) = 1 - 0.971 = 0.029$$

$$\mathbb{P}(X \leq 17) = \Phi\left(\frac{17-20}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(0.949) = 1 - 0.829 = 0.171$$

$$\mathbb{P}(X \leq 20) = \Phi\left(\frac{20-20}{\sqrt{10}}\right) = \Phi(0) = 0.5$$

- mit der Normalapproximation mit Stetigkeitskorrektur

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \Phi\left(\frac{x+0.5-\mu}{\sigma}\right) \qquad \mu = n \cdot p \qquad \sigma = \sqrt{np(1-p)} \qquad \left(\sigma^2 = \mathbb{V}(X) = np(1-p)\right)$$

$$\Phi\left(\frac{x+0.5-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) = \Phi\left(\frac{x-19.5}{\sqrt{10}}\right)$$

$$\mathbb{P}(X \leq 8) = \Phi\left(\frac{8-19.5}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{11.5}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(3.637) = 1 - 0.99986 = 0.00014$$

$$\mathbb{P}(X \leq 11) = \Phi\left(\frac{11-19.5}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{8.5}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(2.688) = 1 - 0.996 = 0.004$$

$$\mathbb{P}(X \leq 14) = \Phi\left(\frac{14-19.5}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5.5}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(1.739) = 1 - 0.959 = 0.041$$

$$\mathbb{P}(X \leq 17) = \Phi\left(\frac{17-19.5}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{2.5}{\sqrt{10}}\right) = 1 - \Phi(0.791) = 1 - 0.785 = 0.215$$

$$\mathbb{P}(X \leq 20) = \Phi\left(\frac{20-19.5}{\sqrt{10}}\right) = \Phi(\frac{0.5}{\sqrt{10}}) = \Phi(0.158) = 0.564$$

2. Wie oft muss man würfeln, damit die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der Augenzahlen größer als 100 ist, mindestens 0.9 beträgt?

   Zentraler Grenzwertsatz (Bedingung: $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig, identisch verteilt):

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \approx N(n\mu, n\sigma^2)$$

$$\mathbb{E}(X_1) = \mathbb{E}(X_2) = \ldots = \mu \quad \Rightarrow \quad \mathbb{E}(S_n) = n \cdot \mu, \qquad \mathbb{V}(X_1) = \mathbb{V}(X_2) = \ldots = \mu \quad \Rightarrow \quad \mathbb{V}(S_n) = n \cdot \sigma^2$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq x\right) \approx \Phi(x) \quad \Rightarrow \quad \mathbb{P}\left(S_n \leq x\right) \approx \Phi\left(\frac{x-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

   Lösung:

$$\mathbb{P}(S_n > 100) = 1 - \mathbb{P}(S_n <= 100) = 1 - \Phi\left(\frac{x-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{100-3.5n}{\sqrt{2.916n}}\right) = 0.9 \quad \Rightarrow \quad \Phi\left(\frac{100-3.5n}{\sqrt{2.916n}}\right) = 0.1$$

   Dies passiert laut Tabelle bei $\Phi(-1.285)$

$$\frac{100-3,5n}{\sqrt{2,916n}} = -1,285 \quad \Rightarrow \quad \frac{58.5607}{\sqrt{n}} - 2.04962\sqrt{n} = -1.285 \quad \Rightarrow \quad n = 32.1249$$

   Das Ergebnis ist genauer, bei Verwendung der Stetigkeitskorrektur: $\dfrac{100.5-3,5n}{\sqrt{2,916n}} = -1,285$

3. Bei einem Spiel kann auf die Augänge $1, \ldots m$ gesetzt werden, die mit Wahrscheinlichkeiten $p_1, \ldots p_m$ gezogen werden. Wenn Ausgang i gezogen wird, werden die Einsätze auf i, m-fach zurückgezahlt,die anderen verfallen. Ein Spieler spielt nach folgender Strategie: er verteilt sein Kapital K im Verhältnis $q_1 : \ldots : q_m$ (mit $\sum_i q_i = 1$) auf die möglichen Ausgänge und verwendet den Gewinn aus einer Runde als Einsatz in den nächsten.

   (a) Zeigen Sie, dass das Kapital nach n (unabhängigen) Runden

$$K_n = K_0 X_1 \ldots X_n$$

   ist, mit $\mathbb{P}(X_i = mq_j) = p_j$.

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0 \cdot m \cdot q = K_0 \cdot X_1 \\ K_2 &= K_1 \cdot X_2 = K_0 \cdot X_1 \cdot X_2 \\ &\vdots \\ K_n &= K_{n-1} \cdot X_n = K_0 \cdot X_1 \cdot X_2 \cdots X_n \end{aligned}$$

(b) Bestimmen Sie
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(K_n)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(K_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(K_0\cdot X_1\cdots X_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\log(K_0)+\log(X_1)+\ldots+\log(X_n))=$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(K_0)+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log(X_i)=\mathbb{E}(\log(X_i))$$

(c) Wie sind $q_1,\ldots,q_m$ zu wählen, damit dieser Grenzwert maximal wird?

$$\mathbb{E}(\log(X_i))=\sum_{i=1}^{m}\log(X_i)\cdot p_i=\sum_{i=1}^{m}\log(m\cdot q_i)\cdot p_i=\sum_{i=1}^{m}(\log(m)+\log(q_i))\cdot p_i=\sum_{i=1}^{m}\underbrace{\log(m)\cdot p_i}_{\text{konstant}}+\log(q_i)\cdot p_i$$

$\sum_{i=1}^{m}\log(q_i)\cdot p_i$ muss maximiert werden unter Bedg, dass $\sum_i q_i=1$

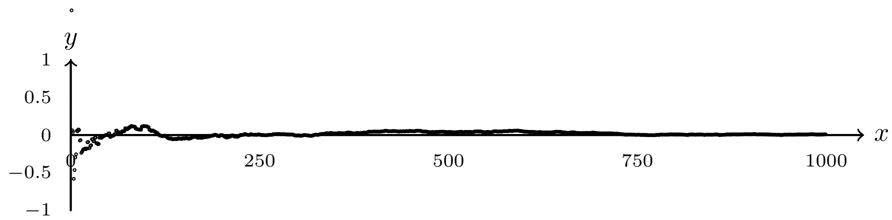
$$\sum_{i=1}^{m}\log(q_i)\cdot p_i-\lambda(\sum_i q_i-1)$$

$$\frac{\partial}{\partial p_i}=\log(q_i)=0 \qquad \frac{\partial}{\partial q_i}=\frac{p_i}{q_i}-\lambda=0 \qquad \frac{\partial}{\partial\lambda}=1-q_i=0$$
$$p_i=\lambda q_i \quad\Rightarrow\quad \lambda=1 \quad\Rightarrow\quad q_i=p_i$$

4. Erzeugen Sie 1000 standardnormalverteilte Zufallsvariable (etwa nach dem Box-Muller Verfahren: $X_1=\sqrt{-2\log U_1}\sin(2\pi U_2)$, $X_2=\sqrt{-2\log U_1}\cos(2\pi U_2)$, das aus zwei unabhängigen auf $[0,1]$ gleichverteilten Zufallszahlen U_1 ,U_2 zwei unabhängige normalverteilte X_1,X_2 erzeugt). Stellen Sie die Stichprobenmittel graphisch dar.

```
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define M_PI 3.14159265358979323846264338327 // Not in C99
#define NUMBERS 1000

static double rand2(void);

int main() {
    srand(time(NULL)); // seed
    double sum = 0;

    // 500, because every loop 2 random uniform
    // distributed [0,1] variables will be created
    for (int i = 0; i < NUMBERS / 2; i++) {
        double u_1 = rand2();
        double u_2 = rand2();

        double x_1 = sqrt(-2 * log(u_1)) * cos(2 * M_PI * u_2);
        double x_2 = sqrt(-2 * log(u_1)) * sin(2 * M_PI * u_2);

        sum += x_1 + x_2;

        (void) printf("%f, Stichprobenmittel: %f\n
                      %f, Stichprobenmittel: %f\n",
                      x_1, (sum-x_2)/(i*2), x_2, sum/(i*2+1));
}
}
```

```
// Returns random value between 0 and 1
static double rand2() {
    return (double) rand() / (double) RAND_MAX;
}
```



5. Wie vorher, mit X_i Cauchy-verteilt.

   Cauchy-Verteilungsfunktion:

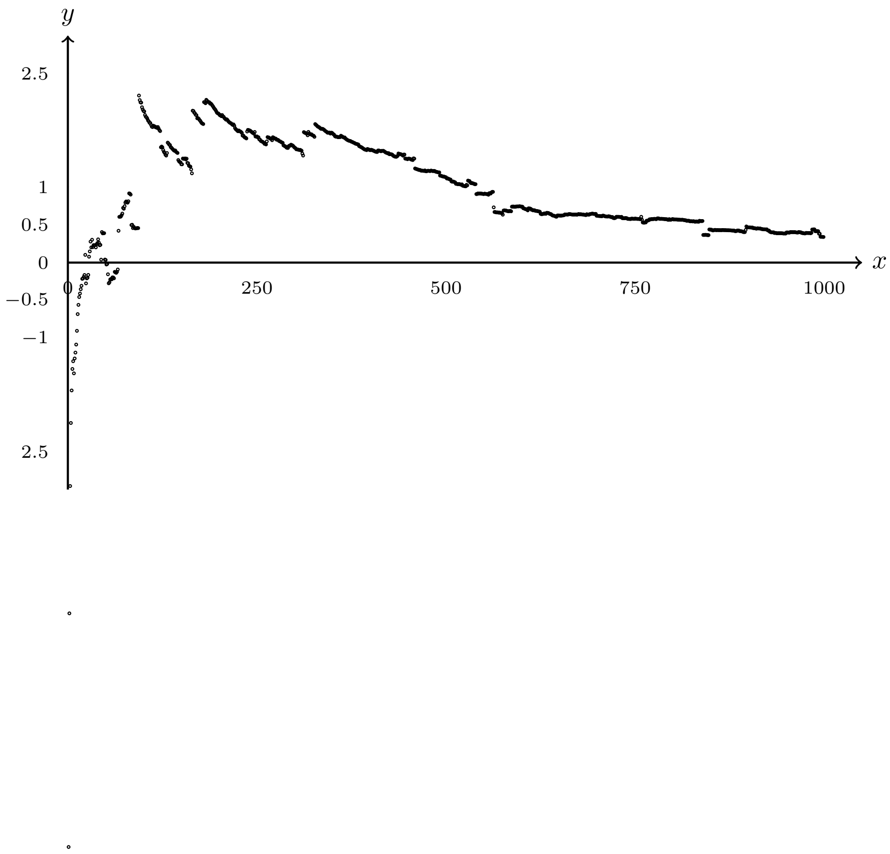
$$F(x) = P(X < x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right)$$

   Mit der Inversionsmethode bekommt man aus einer gleichverteilten Zufallsvariable, eine Zufallsvariable einer anderen Verteilungsfunktion (sofern diese umkehrbar ist) indem man die Inverse dieser anderen Verteilungsfunktion bildet

$$y = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \cdot \arctan\left(\frac{x-t}{s}\right) \quad \Rightarrow \quad x = t - s \cdot \cot(\pi y) = -\cot(\pi y) = \cot(\pi y) \text{ für } t = 0,\ s = 1 \text{ (Std-Cauchy-Vert.)}$$

$$F^{-1}(y) = \cot(\pi y) \qquad x_i := \cot(\pi u_i)$$

```
#include <time.h>
#include <stdlib.h>
#include <stdio.h>
#include <math.h>

#define M_PI 3.14159265358979323846264338327 // Not in C99
#define cot(x)  cos(x)/sin(x)
#define NUMBERS 1000

static double rand2(void);

int main() {
    srand(time(NULL)); // seed
    double sum = 0;

    for (int i = 0; i < NUMBERS; i++) {
        double u = rand2();
        double x = cot(M_PI * u);
        sum += x;

        (void) printf("%f, Stichprobenmittel: %f\n", x, sum/(double)i)
        (void) printf("%f\n", x);
}
}

// Returns random value between 0 and 1
static double rand2() {
    return (double) rand() / (double) RAND_MAX;
}
```



6. (X_n) seien unabhängig gleichverteilt auf $[0,1]$. Bestimmen Sie

$$\mathbb{P}\Big(\prod_{n=1}^{50} X_n > 2^{-50}\Big)$$

$$\mathbb{P}\Big(\sum_{n=1}^{50} \log(X_n) > -50\log(2)\Big) = \mathbb{P}\Big(\sum_{n=1}^{52} \underbrace{\log(X_n)}_{Y_n \sim Exp(x)} \leq 50\log(2)\Big)$$

$$\mathbb{E}(Y_n) = \mathbb{V}(Y_n) = 1$$

$$\Phi\left(\frac{50\log(2)-50}{\sqrt{1\cdot 50}}\right) = \Phi(-2.17)$$

Sieht man nicht sofort, dass Exponentialverteilung vorliegt:

$$\mathbb{P}(Y \leq y) = \mathbb{P}(-\log(X) \leq y) = \mathbb{P}(\log(X) - y) = \mathbb{P}(X \geq e^{-y} = 1 - e^{-y}$$

7. Rundungsfehler: zweistellige Dezimalzahlen der Form $0.ab$ werden auf eine Dezimalstelle gerundet. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz des Rundungsfehlers.

   (a) Wenn bei $b = 5$ aufgerundet wird

   (b) Wenn bei $b = 5$ auf die nächste gerade Ziffer gerundet wird (etwa 0.15 auf 0.2, 0.65 auf 0.6)

   Wie verhält sich der Rundungsfehler, wenn 100 Zahlen addiert werden
   (geben Sie - näherungsweise - 0.01- und 0.99-Quantile dafür an)?

   $b = 5$ **wird aufgerundet**:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=-0.04}^{0.05} x \cdot \frac{1}{10} = -\frac{0.04}{10} - \frac{0.03}{10} - \frac{0.02}{10} - \frac{0.01}{10} + \frac{0}{10} + \frac{0.01}{10} + \frac{0.02}{10} + \frac{0.03}{10} + \frac{0.04}{10} + \frac{0.05}{10} = 0.005$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \left(\sum_{x=-0.04}^{0.05} x^2 \cdot \frac{1}{10}\right) - 0.005^2 = 0.000825$$

100 **Additionen**:

$$\mu = 0.005 \qquad \sigma^2 = 0.000825 \qquad n = 100$$

$$\Phi\left(\frac{x - \mu \cdot n}{\sqrt{\sigma^2 n}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 0.5}{\sqrt{0.0825}}\right) = 0.01 \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 0.5}{\sqrt{0.0825}} = -3.09 \quad \Rightarrow \quad x = -0.388$$

$$\Phi\left(\frac{x - \mu \cdot n}{\sqrt{\sigma^2 n}}\right) = \Phi\left(\frac{x - 0.5}{\sqrt{0.0825}}\right) = 0.99 \quad \Rightarrow \quad \frac{x - 0.5}{\sqrt{0.0825}} = 2.325 \quad \Rightarrow \quad x = 1.168$$

$b = 5$ **auf nächste gerade**:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x=-0.05}^{0.05} x \cdot \frac{1}{10} = 0$$

$$\mathbb{V}(X) = \sum_{x=-0.05}^{0.05} x^2 \cdot \frac{1}{10} - 0^2 = 0.0011$$

100 **Additionen**:

$$\mu = 0 \qquad \sigma^2 = 0.0011 \qquad n = 100$$

$$\Phi\left(\frac{x - \mu \cdot n}{\sqrt{\sigma^2 n}}\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{0.11}}\right) = 0.01 \quad \Rightarrow \quad x = -1.025$$

$$\Phi\left(\frac{x - \mu \cdot n}{\sqrt{\sigma^2 n}}\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{0.11}}\right) = 0.99 \quad \Rightarrow \quad x = 0.771$$