Relativitätstheorie

Juni 2014

Inhaltsverzeichnis

1 Weltanschauungen

- 300 v. Chr. Aristoteles
  Trennung in Himmel (Sphäre) und Erde.
- 1540 Galileo Galilei
  Natur beobachtung - Hypothese und Experimente, Fallgesetze (Alle Objekte fallen gleich schnell); Planeten - Monde.
- Ptolemäisches Weltbild
  Die Erde ist der Mittelpunkt um den alles kreist. Die Planeten bewegen sich auf "komischen Bahnenrund um die Erde.
- Kopernikus
  Die Sonne ist der Mittelpunkt um den sich alles in Kreisrunden Bahnen dreht.
- 1570 Keppler
  Nachfolger van Tycho Brahe. Beobachtung von Marsbahnen. Definiert drei Planetengesetze:
  - Planeten bewegen sich auf Ellipsen mit der Sonne im Brennpunkt.
  - Verbindung zwischen Sonne und Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
  - $\frac{r^3}{T^3}$=constant, T ist die Umlaufzeit, r der Radius

Physiker beantworten kein *Warum*-fragen, sondern reduzieren die Anzahl dieser Fragen.

2 Newton

Mathematice Principia Philosophiere Naturalis ($\approx$ 1666).

2.1 Bewegungsgleichungen

Newton definierte die Regeln der Bewegung neu. In der Antike ist Ruhe der Normalzustand. Um seine Regeln zu verwenden musste er noch nebenbei die *Differential und Integralrechnung* definieren. Sein *2. Axiom* (zweites Bewegungsgesetz) lautet:

$$m\ddot{x}^i(t) = F^i(x^m(t)).$$

Es liest sich als Masse $*$ Beschleunigung = Kraft". Das bedeutet, dass für die Beschleunigung Kraft benötigt wird. Ohne Krafteinwirkung bleibt die Geschwindigkeit konstant. Experimente, die die Reibung verringern zeigen dieses Verhalten.

Herleitungen von Lage zu Geschwindigkeit zu Beschleunigung. Wenn man ein Objekt zur Zeit t am Punkt $x^i(t)$ beobachtet und das gleiche Objekt ϵ Zeiteinheiten später am Punkt $x^i(t+\epsilon)$ beobachtet, dann kann man sich die Geschwindigkeit des Objekts errechnen. Man lässt den Zeitschritt ϵ immer kleiner werden und gegen 0 gehen. Damit legt man effektiv eine Tangente an den Punkt zur Zeit t. Die Formel lautet:

$$\dot{x}^i(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{x^i(t+\epsilon) - x^i(t)}{\epsilon}\right)$$

Für die Beschleunigung kann man das gleiche Verfahren anwenden, nur diesmal von Geschwindigkeit zu Beschleunigung:

$$\ddot{x}^i(t) = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{\dot{x}^i(t+\epsilon) - \dot{x}^i(t)}{\epsilon}\right)$$

2.2 Gravitationskraft

$$F_g^i = F^i_{(x^m)} = -G\frac{M\cdot m}{r^3}|x^i|$$

Mit der Definition $|x^i| = r$. Die Gravitation ist eine konstante Kraft zwischen Massen und nimmt mit dem Abstandsquadrat ab.

Durch Newtons Gesetze können wir bei Kenntnis der Kraft Vorhersagen zur Position eines Objektes treffen. Zum Beispiel können wir mit der (ziemlich) konstanten Gravitationskraft auf der Erde eine Wurfparabel berechnen. Wenn sich die Entfernung zwischen den Massen nicht zu stark ändert, dann kann man die Gravitation zu einer Konstanten approximieren.

Beispiel zu Erde und Satelit in einer Umlaufbahn, bei der er in konstanten Zeitschritten die Bahn approximiert:

- Derzeitigen Geschwindigkeitsvektor einzeichnen
- Am ende des Vektors den Gravitationsvektor einzeichnen, einen zweiten mit der Masse skalierten einzeichnen.
- Vom Originalpunkt zum neuen skalierten Vektor einen Vektor einzeichnen. Den neu gezeichneten Vektor paralellverschieben (am Ende des originalen Geschwindikeitsvektors einzeichnen). Der neue Vektor ist der neue Geschwindigkeitsvektor.

Newton trifft keine Aussage wie die Gravitation wirkt oder wie sie sich ausbreitet.

3 Elektromagnetismus

- Coulomb: Feldbegriff: magnetische und elektrische Strömungen:

$$F_c^i(x^m) = k\frac{Q \cdot q}{r^3}x^i.$$

  Die Coulomb Kraft definiert die Kraft zwischen Ladungen. Im Gegensatz zum Magnetismus gibt es hier negative und positive Ladungen (Abstoßung und Anziehung möglich). Die Kraft ist abhängig von der Position.
- Faraday (1790): Feldbegriff für Überträger
- Maxwell (1830): Gleichungssystem für das elektrische Feld (E^i) und das magnetische Feld (B^i):

Formel	Erklärung
$\delta_i E^i = \frac{1}{\epsilon_0} f(x^m, t)$	Gauß'sches Gesetz, Quelldichte des elektrischen Feldes, Quellen und Senken des elektrischen Feldes
$\epsilon_{ijk}\delta_j E^k(x^m, t) + \dot{B}^i(x^m, t) = 0$	Faraday, wie viel Material strömt um einen Punkt
$\delta_i B^i(x^m, t) = 0$	keine Magnetischen Quellen oder Senken, keine Magnetischen Ladungen
$\epsilon_{(i,j,k)}\delta_j B^k(x^m, t) - \mu_0\epsilon_0\dot{E}^i(x^m, t) = \mu_0\gamma^i(x^m, t)$	Ampére Maxwell, Wirbelstärke an einem Punkt, Wirbeldichte von B^u bezüglich der i-ten Richtung, wobei der rechte Term die Stromdichte bezeichnet

  Maxwell-Gleichungen sind Wellengleichungen für E^i und B^i. Das Ausbreitungsmedium ist das *Äther* und die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0\mu_0} = (3 \cdot 10^8)^2\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$.

3.1 Erklärungen zu Maxwell Gleichungen

Es ist NICHT wichtig die Formeln auswendig zu lernen, sondern das Konzept dahinter soll verstanden werden.

δ_i ist die Änderung in Richtung von x^i (Ableitung nach i)

$$\lim_{\epsilon \to 0} [f(x^m + \epsilon * e_i^m) - f(x^m)]\frac{1}{\epsilon} = \delta_i f(x^m)$$

wobei e_i^m der Einheitsvector in die Richtung i in einem m dimensionalen Raum ist.

Die Quelldichte $\delta_i E^i(x^m)$ wurde auf 2 äquivalente Arten beschrieben:

- Um den zu berechnenden Punkt wird ein Würfel gelegt. Es wird nun gemessen (errechnet) wie groß die elektrischen Flüsse auf den Flächen des Würfels sind. Die größe des Würfels lässt man gegen Null gehen.

$$\delta_i E^i(x^m) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{V(w_\epsilon)} \int_{w_\epsilon} d^2 f^i E^i$$

- Um den Punkt wird ein Kreis gezogen. Rund um den Kreis werden die elektrischen Flüsse aufsummiert (Normalenvector n^i multipliziert mit dem Strom). Die Größe des Kreises geht gegen Null.

$$\delta_i E^i(x^m) = \int n^i E^i dA$$

Erklärung für ϵ_{ijk} Die Vertauschung eines Index tauscht das Vorzeichen:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{jik} \\ \epsilon_{1,2,3} &= 1 \\ \epsilon_{1,1,3} &= -\epsilon_{1,1,3} \\ \epsilon_{1,1,3} &= 0 \end{aligned}$$

4 Einstein und seine Zeit

4.1 Michael More-Experiment

Experiement um Äther zu beweisen: Die Erde kreist um die Sonne. An einem Punkt muss sich die Erde im Ruhesystem des Äther befinden. Ein halbes Jahr später kann die Erde nicht mehr im Ruhesystem sein. An diesen 2 Punkten wird ein Experiment durchgeführt. Eine Box in der ein Lichtstrahl geleitet wird. In der Mitte der Box befindet sich ein halbdurchlässiger Spiegel im 45 Grad Winkel. An den Endpunkten der Lichtstrahlen in der Box befinden sich voll reflektierende Spiegel. An der oberen Seite ist ein Sensor. Im Ruhsystem des Äthers sollten sich die Wellenlängen des Lichtstrahls nicht zueinander verschieben. Ein halbes Jahr später sollten sie sich aber verschieben, da das Licht in eine Richtung mehr Weg zurück legen muss. Für dieses Experiment wurden sogar in der ganzen Stadt der Autoverkehr still gelegt. Doch das Experiment blieb immer erfolglos.

4.2 Spezielle Relativitätstheorie (SRT)

Es wurden dem Äther immer mehr Eigenschaften zugeschrieben, die ihn unbeobachtbar machten. Einstein kam dann auf die Idee/Annahme der einen globalen Zeit abzuschaffen.

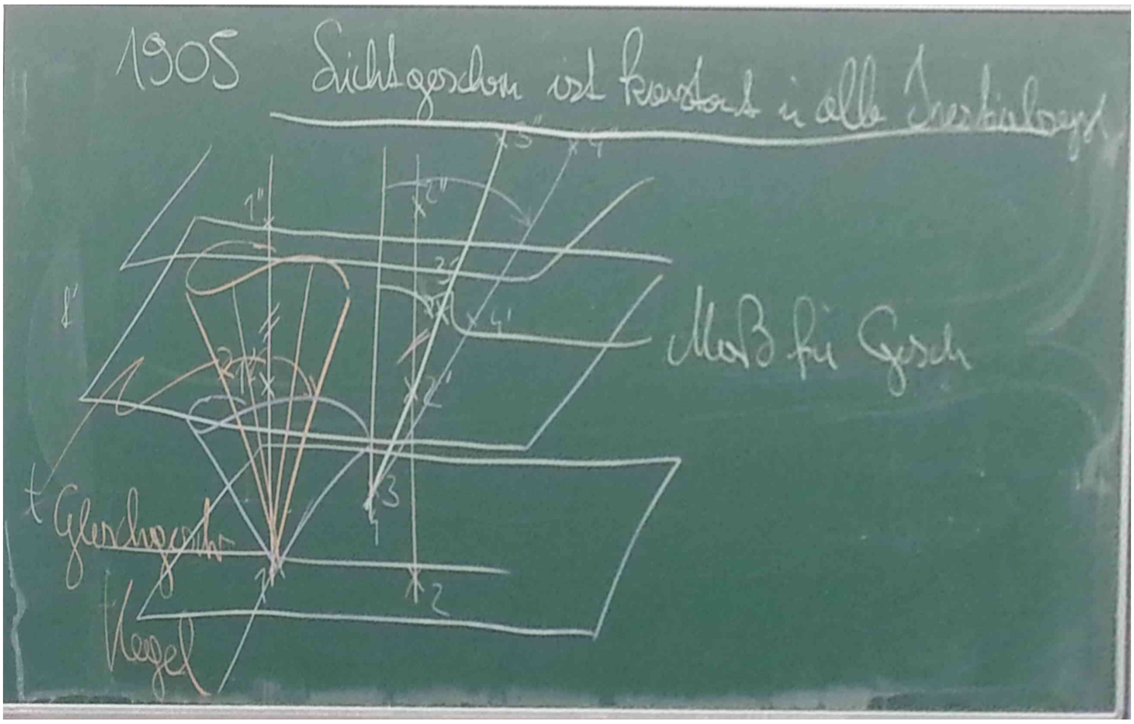
- Einstein (1905): Es gibt keinen Äther. Zeit ist vom Bewegungszustand abhangig und auch die Länge von Objekten: die Lichtgeschwindigkeit ist in jedem Bezugssystem konstant.
- Herman Mikovski (1908): 4D-Raum-Zeit.
  Es gibt 4 dimensionen $\mu = 0, 1, 2, 3$, wobei eine für die Zeit und die anderen 3 für den Raum verwendet werden.

$$x^\mu = (t, x^i)$$

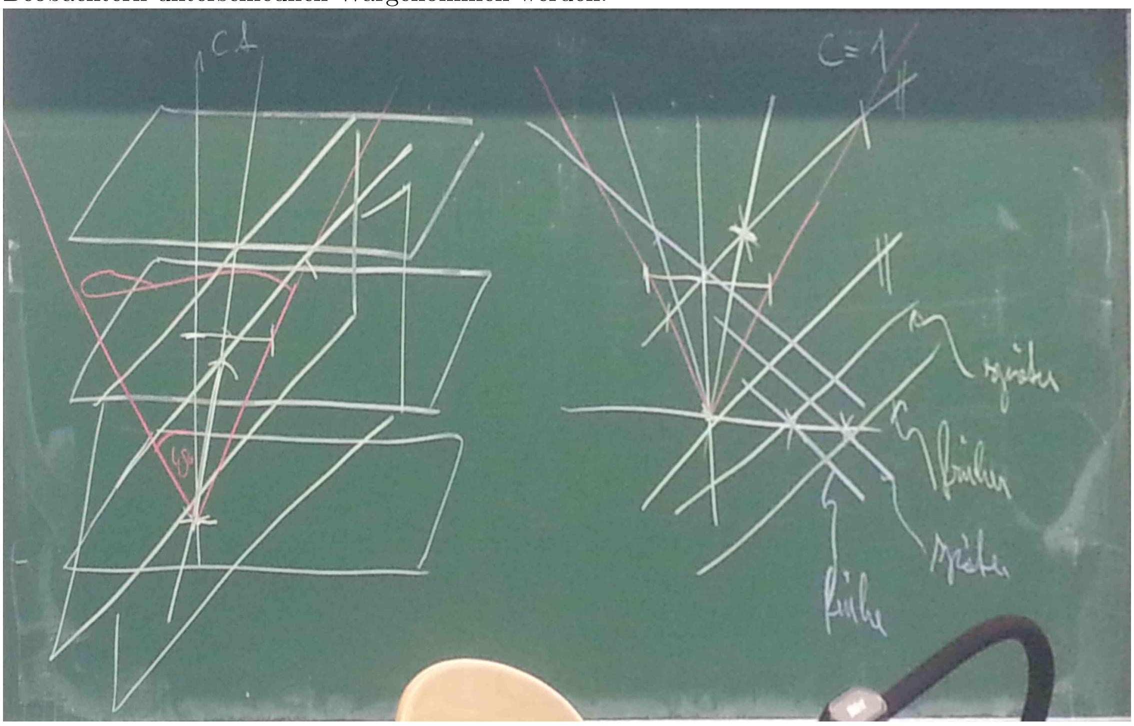
- Rieman Geometrie: Gerade = Autoparalele Kurve.
- Einstein (1915): ART: Gravitation ist KEINE Kraft.

Relative Ruhe drückt sich durch parallelität der Weltlinien aus. Die Neigung der Weltlinien ist ein Maß für die Geschwindigkeit Der *Gleichgeschwindigkeitskegel* definiert ausgehend von einem Punkt mit einer konstanten Geschwindigkeit alle möglichen erreichbaren Positionen zu einer bestimmten Zeit.

Der Lichtkegel muss in allen Bezugssystemen gleich sein.



Jeder Beobachter hat seine eigenen Gleichzeitebenen. Diese verändern sich durch relative Geschwindigkeit zwischen den Beobachtern. Die zeitliche Ordnung zweier Ereignisse, kann von 2 Beobachtern unterschiedlich Wargenommen werden.

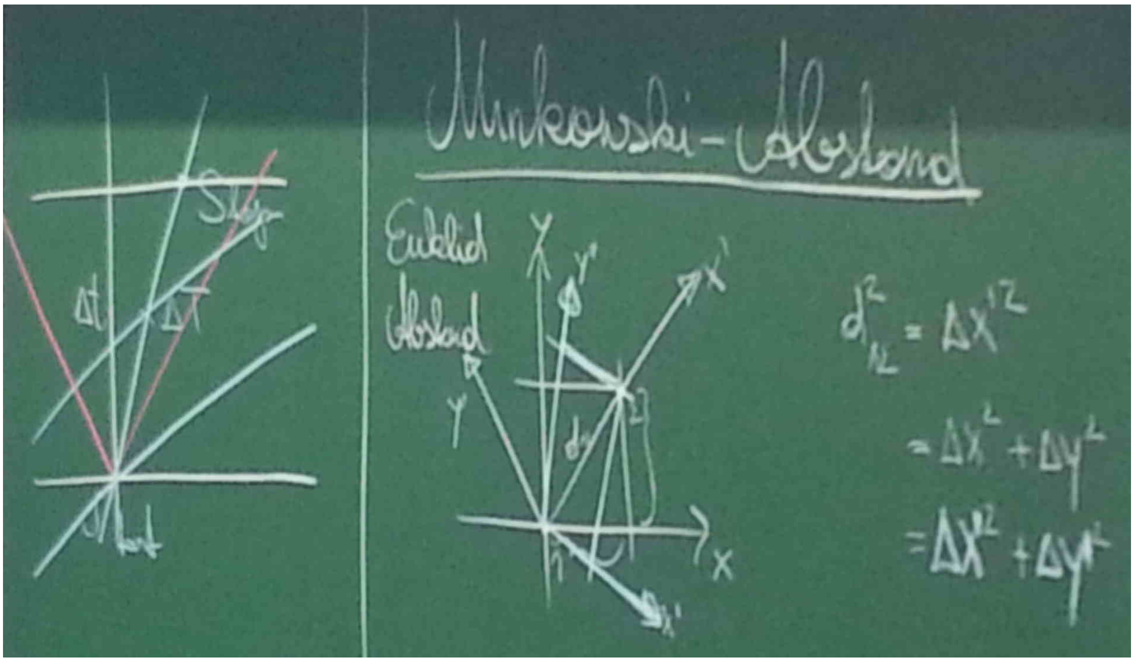


Ein Objekt in Ruhe hat wenn ich es messe in der Bewegung eine andere Länge.

4.2.1 Mikovski-Abstand

Der euklidische Abstand ist definiert als die Summe der Abstandsquadrate. Im 2-D Raum:

$$\begin{aligned} \text{Distanz}^2 &= a^2 + b^2 \\ d_{1,2}^2 &= \Delta x'^2 \\ &= \Delta x^2 + \Delta y^2 \end{aligned}$$



Beim Abstandsmaß in der Raumzeit müssen wir eine andere Definition verwenden, den Mikovski-Abstand. Die Zeit wird in Längen gemessen, und weil es angenehmer zum Rechnen ist setzen wir die Lichtgeschwindigkeit $c = 1$.

$$d_M^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^i \Delta x^i$$

$$d_M^2 \begin{cases} < 0 & \text{innerhalb des Lichtkegels} \\ > 0 & \text{außerhalb des Lichtkegels} \\ = 0 & \text{direkt am Lichtkegel} \end{cases}$$

Das gleiche in 4 Dimensionen: Das euklidische Abstandsquadrat

$$\Delta S_E^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

wird ersetzt durch:

$$\Delta S_M^2 = -\Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$$

Der Mikovski-Abstand ist invariant. Der Lichtkegel ist invariant (für alle Beobachter gleich).

$$\Delta t = \Delta r$$

Für den Kreis, der die Zeit-Fläche schneidet ist der mikovski-abstand 0.

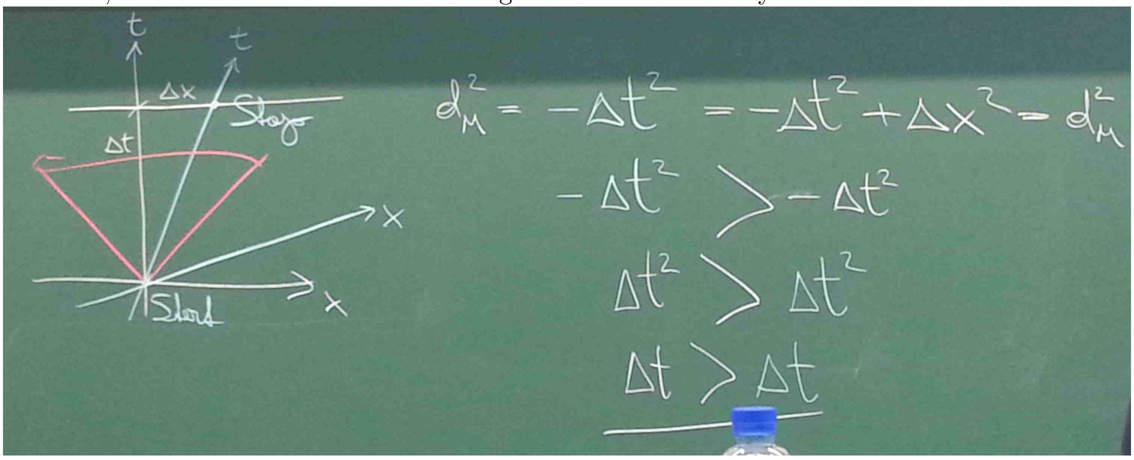
4.3 Anwendungen

Einige Anmerkungen:

- Ein Punkt im Raum ist für alle gleich.
- Der Lichtkegel ist für alle gleich.
- Nur ereignisse innerhalb des Lichtkegels können kausal von einander abhängen.

4.3.1 Zeitdilation

Beim Tafelbeispiel kann man sehen, dass das blaue t (das rechte) kleiner ist als das weiße. Das bedeutet, dass der Zeitschritt von uns aus gesehen beim blauen system kleiner ist.



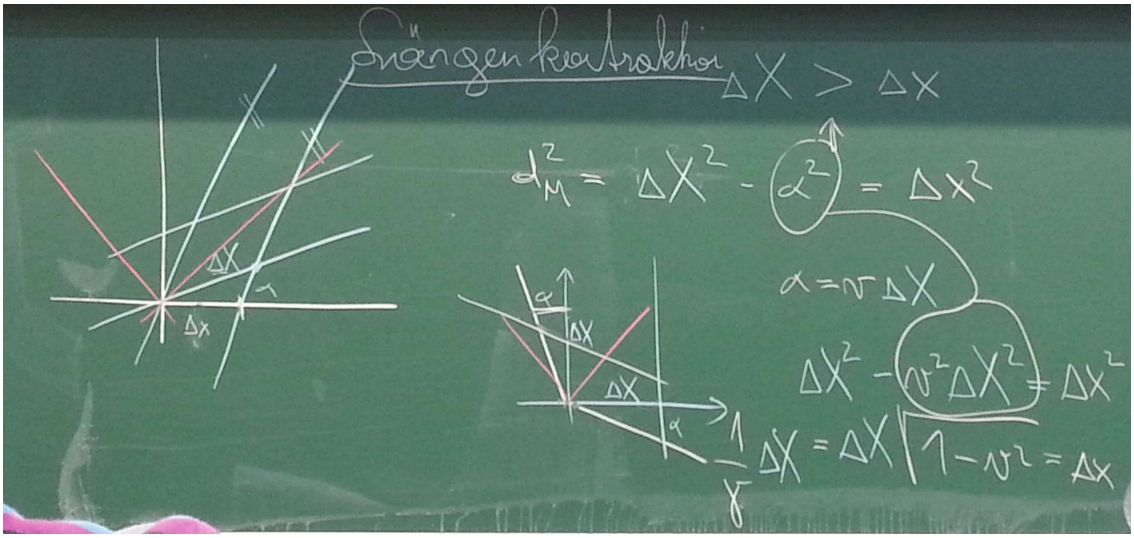
Mit dem gleichen Aufbau kann man auch genau berechnen, wie groß das Verhältnis ist. Objekt mit konstanter Geschwindigkeit $v \to$ Zeitverschiebung.

$$\begin{aligned}
d_M^2 &= -\Delta t^2 + \Delta x^2 \\
&= -\Delta T^2 \\
&= -\Delta t^2 + v^2 \Delta t^2 \\
&= -\Delta t^2 (1 - v^2) \\
\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \Delta T &= \Delta t \\
&\implies \quad \Delta t \text{ ist größer als } \Delta T
\end{aligned}$$

Der faktor $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ ist immer gößer gleich 1 ($\gamma \geq 1$). Wenn das ganze mit Richtungsvektoren gemacht wird, sieht das so aus:

4.3.2 Längenkontraktion

Ein sich gegenüber mir bewegtes System hat eine kleinere Länge, wenn ich versuche es zu messen. Der Faktor ist wie folgt:



$$d_M^2 = -\Delta X^2 - \alpha^2 = \Delta x^2$$
$$\alpha = v\Delta X$$
$$\Delta x^2 = \Delta X^2 - v^2 \Delta X^2$$

4.3.3 Anmerkungen

Wir schreiben jetzt mit Matrix und verwenden ein 4dimensionales $\mu = (0, i) = (t, x^i)$

w-vektor zeigt in die räumliche Richtung. u-vektor ist die zeitliche Richtung. Was ist das Längenquadrat der Zeit? Mit η bekommt man für die Zeit-elemente ein negatives vorzeichen und für die Raum-komponenten positives vorzeichen.

So etwas gibt es auch für den bewegten Beobachter. Wir verlangen, das u^2 und w^2 die gleichen relationen erfüllen. Für uns bewegt sich der andere mit der geschwindigkeit v. γ ist eine normierung, die wir am anfang noch nicht wissen. Wir berechnen dann $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$. Die multiplikation von u_0 und w_0 kommt 0 raus, da beide Vektoren orthogonal zueinander stehen.

Beispiel für Normalvektor-berechnung: $v^i = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix}$ und $n^i = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \\ 0 \end{pmatrix}$, $n^i v^j \delta_{ij} = n^i v^i = 0$

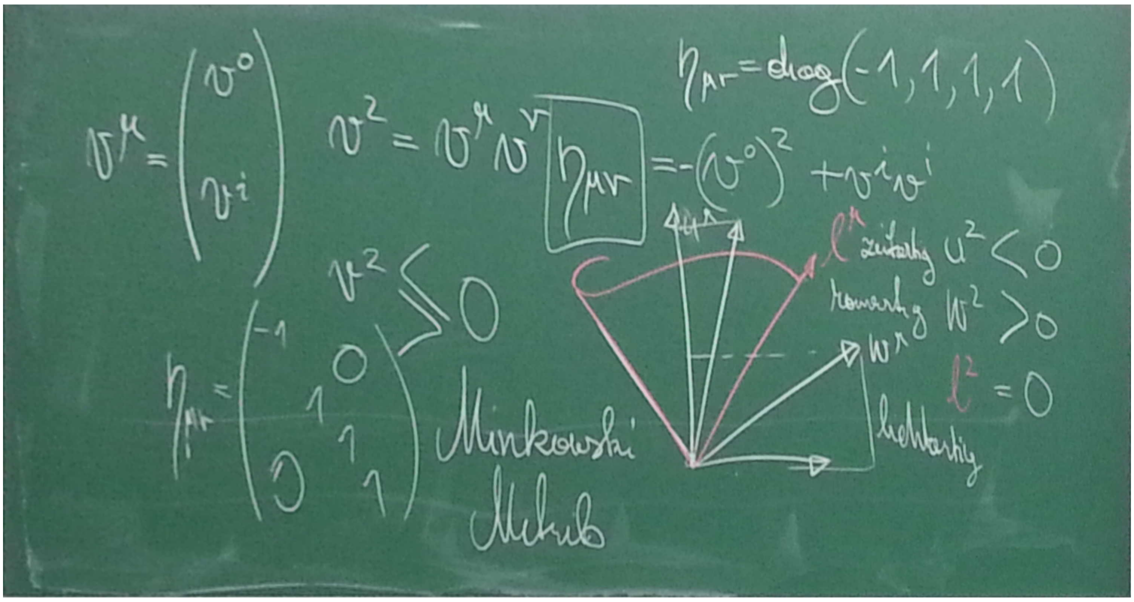
Gleiches Beispiel, aber nun im 4-dimensionalen. w^2 wird berechnet, also das Längenquadrat von w. Und das ergibt $w^2 = \gamma^2(-v^2 + 1) = 1$. Wichtig dabei, wenn wir quadrieren bekommt die Zeitkomponente ein negatives Vorzeichen.

4.4 Mikovski Metrik

$$v^\mu = \begin{pmatrix} v^0 \\ v^i \end{pmatrix}$$

Das Konstrukt $\eta_{\mu\nu}$ hilft das innere Vektor-Produkt zu bilden. Es versieht den Zeitanteil mit einem Negativen Vorzeichen.

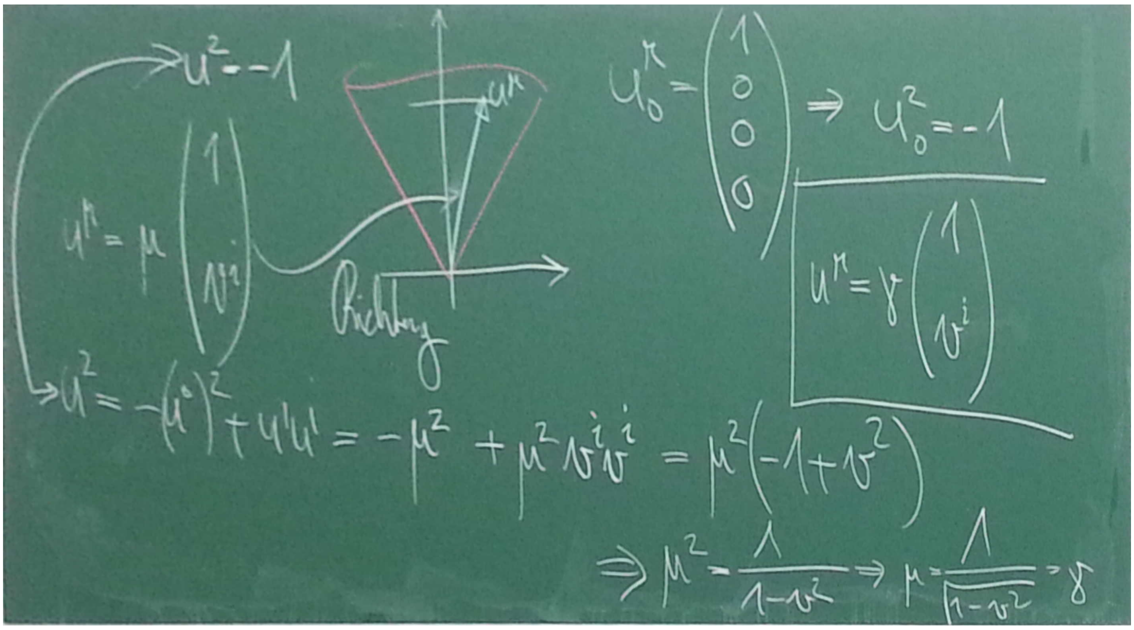
$$\eta_{\mu\nu} = diag(-1, 1, 1, 1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Die gezeigten Vektoren kann man in 3 Klassen einordnen:

$$\begin{aligned} u^2 &< 0 \quad \text{zeitartig} \\ w^2 &> 0 \quad \text{raumartig} \\ l^2 &= 0 \quad \text{lichtartig} \end{aligned}$$

4.4.1 Raumartiger Vektor



Das erste Beispiel zeigt einen raumartigen Vektor. Die Geschwindigkeit des Objekts ist kleiner als die Lichtgeschwindigkeit. Von unserem Bezugssystem sieht der Vektor folgendermaßen aus:

$$u^\mu = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ v^i \end{pmatrix}$$

Im eigenen Bezugsystem ist es:

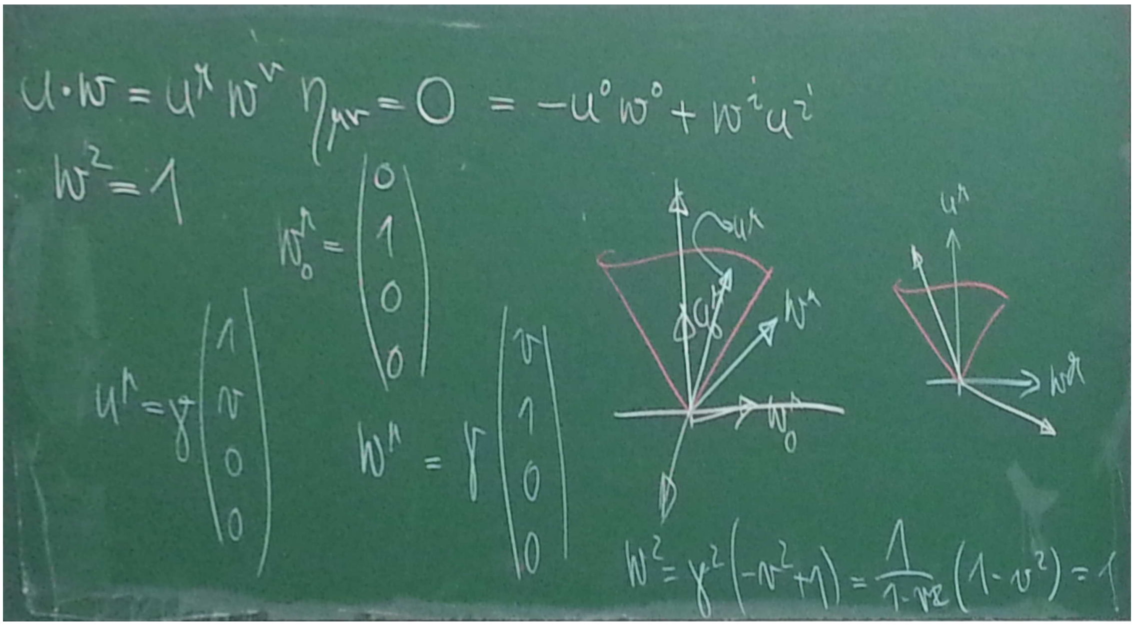
$$u_0^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Was wichtig ist, ist dass das Vektorquadrat nicht vom Bezugssystem abhängt: $u^2 = u_0^2 = -1$
Beim Vektorquadrat u_0^2 ist das leicht zu sehen. Bei u^2 hilft uns der Skalar μ.

$$u^2 = -(1)^2 + u^i u^i = -\mu^2 + \mu^2 v^i v^i = \mu^2(-1 + v^2)$$

$$\implies \mu^2 = \frac{1}{1 - v^2} \implies \mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma$$

4.4.2 Zeitartiger Vektor



Das Tafel-Beispiel zeigt glaub ich einen zeitartigen Vektor.

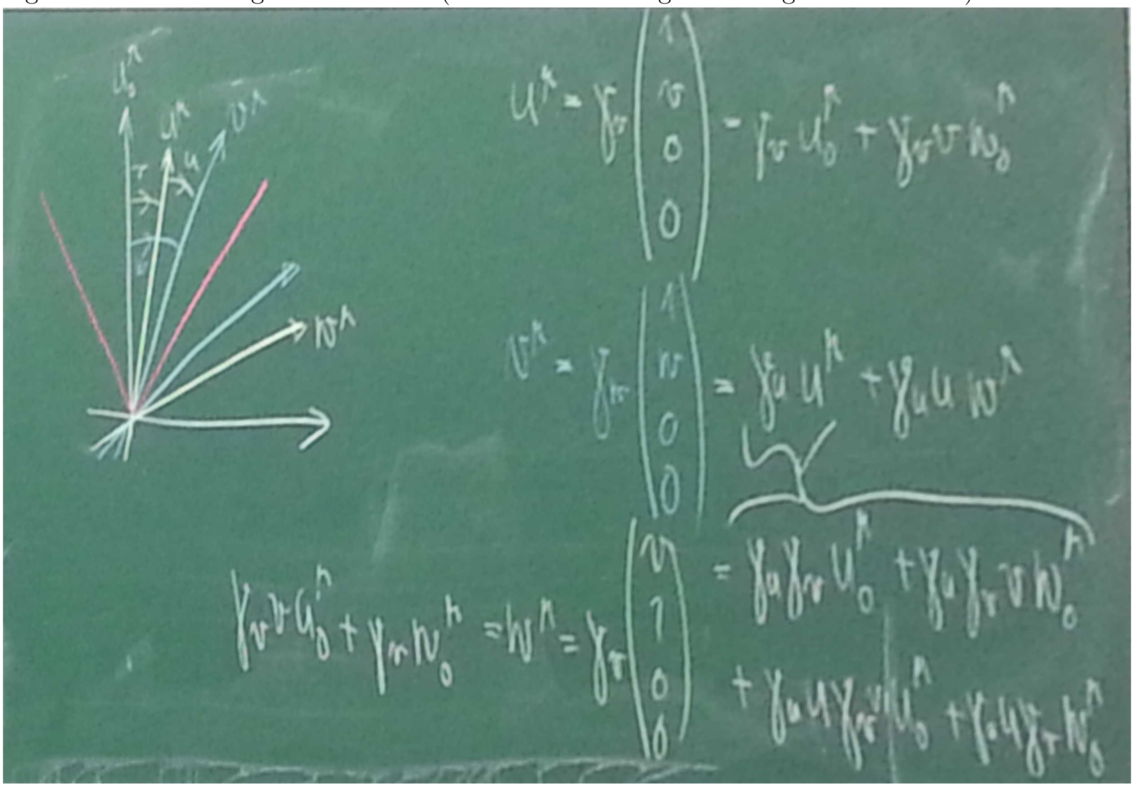
$$u^2 = -1$$

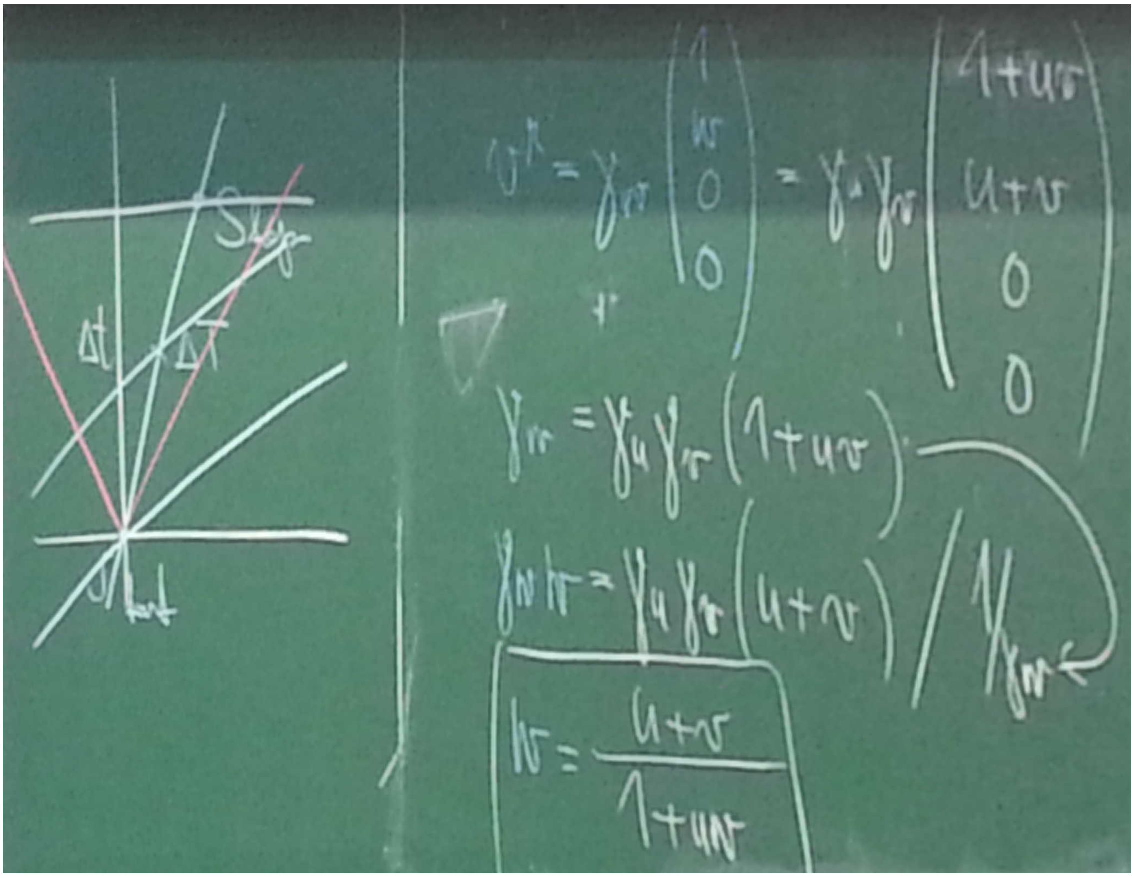
$$u_0^\mu = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies u_0^2 = -1$$

$$
\begin{aligned}
u^\mu &= \mu \begin{pmatrix} 1 \\ v^i \end{pmatrix} \\
u^2 &= -(u^0)^2 + u'u' \\
&= -\mu^2 + \mu^2 v^i v^i \\
&= \mu^2(-1 + v^2) \\
&\implies \mu^2 = \frac{1}{1 - v^2} \\
&\implies \mu = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} = \gamma \\
&\implies u^\mu = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v^i \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

4.4.3 Geschwindigkeitsaddition

Das folgende Tafel-Beispiel zeigt, dass es nicht möglich ist, durch addition von endlichen Geschwindigkeiten den Lichtkegel zu verlassen (schneller als Lichtgeschwindigkeit zu werden).





4.5 4-rer-Impuls

Im 3Dimensionalen Raum hat der Impuls folgende Beschreibung:

$$\begin{aligned} p^i &= m\dot{x}^i \\ &= mv^i \end{aligned}$$

Überträgt man das Konzept des Impulses in den 4-dimensionalen Mikovski-Raum erhält man folgende Formel:

$$p^\mu = mu^\mu$$

Das Vektorquadrad eines impulses ist wie folgt:

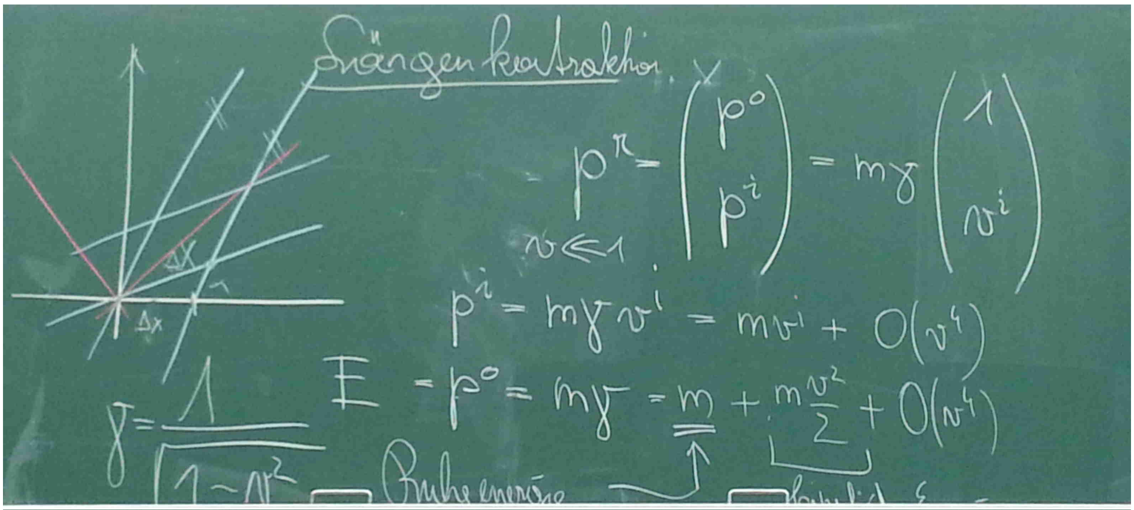
$$p^2 = m^2u^2 = -m^2$$

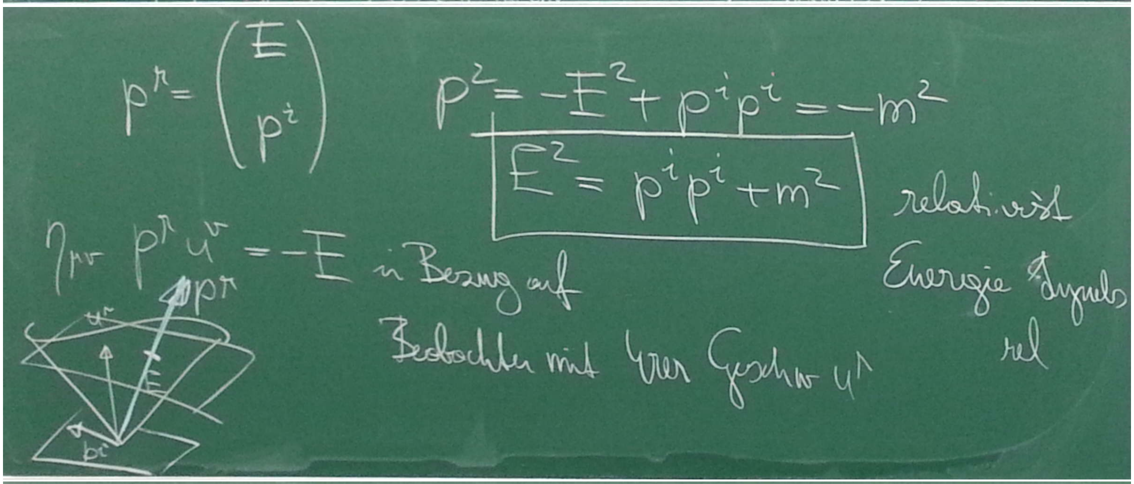
Im Bezugssystem des Impulsvektors sieht das dann wie folgt aus:

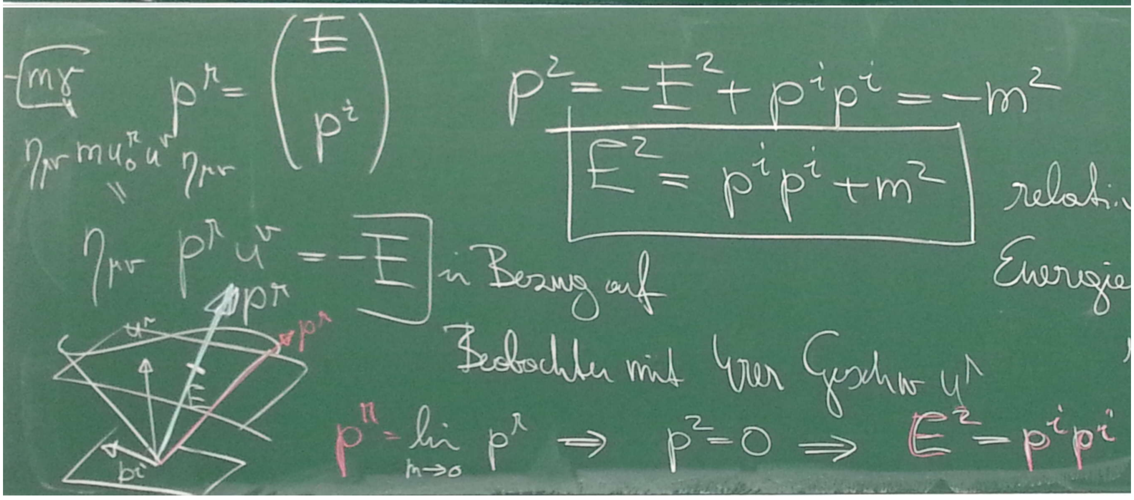
$$p^\mu = mu_0^\mu = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.5.1 Längenkontraktion

Ich glaube, dass er bei dem Bild noch etwas zum Impuls erklärt hat. Also, dass es gar nicht zur Längenkontraktion gehört. Er spaltet die Energie des Impulses in Ruheenergie ($= m$) und kinetische Energie ($= m\frac{v^2}{2}$) auf.







Die Raumzeitdarstellung vereinheitlicht Größen. Impuls ist Masse mal Geschwindigkeit. 4er-Impuls (4 dimensionaler Impuls):

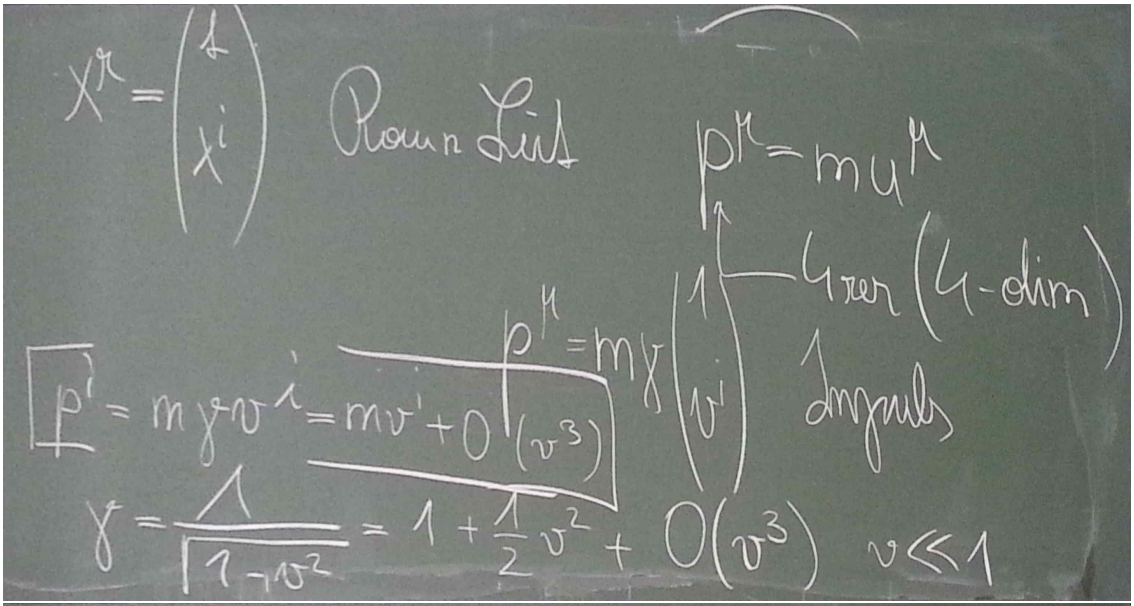
$$p^\mu = mu^\mu$$

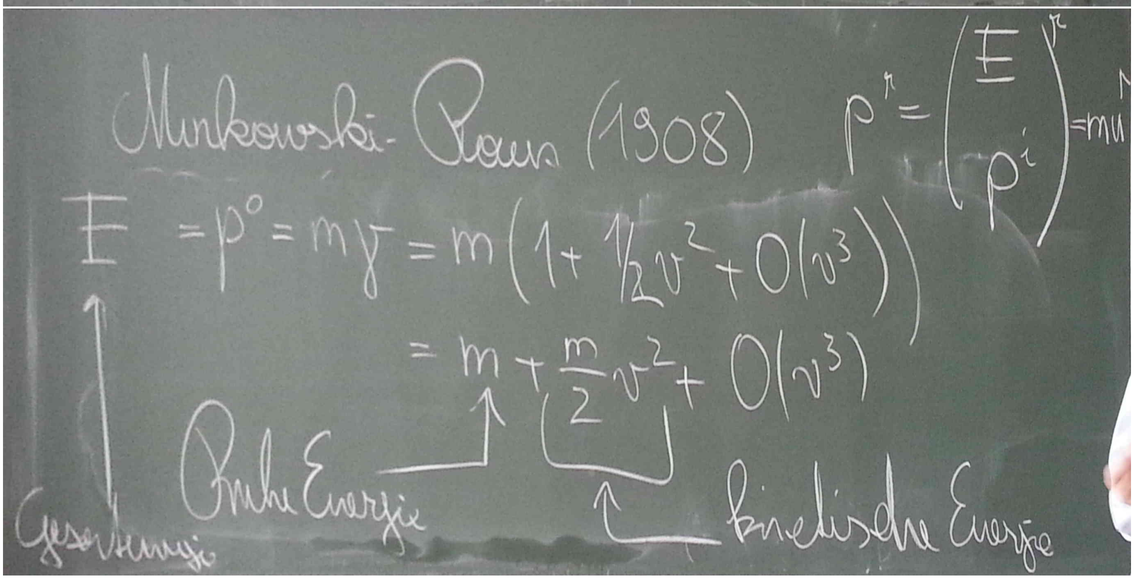
$$p^\mu = m\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v^i \end{pmatrix}$$

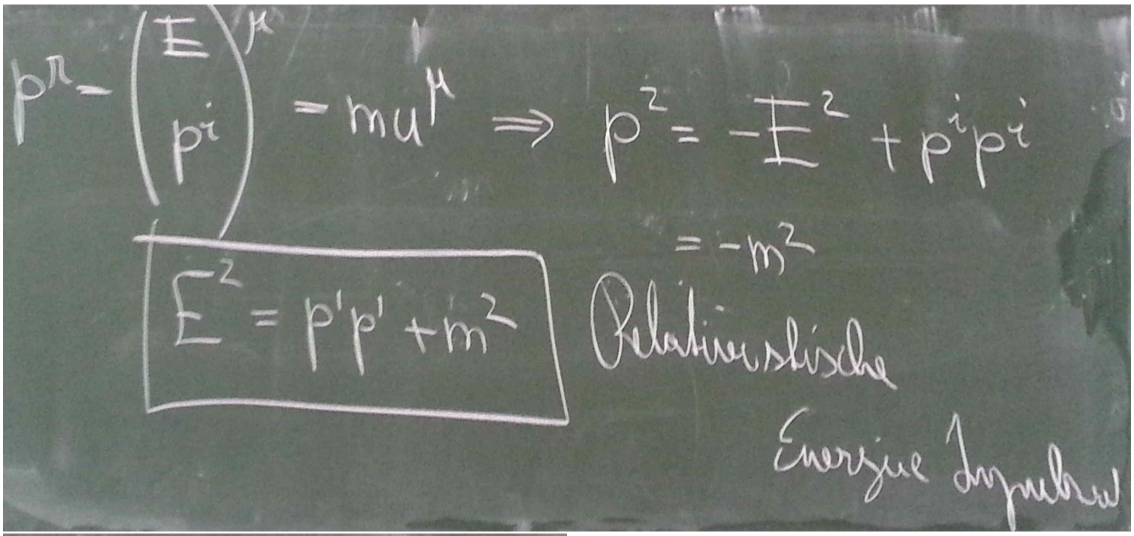
Unsere Geschwindigkeiten v sind immer in Bruchteilen der Lichtgeschwindigkeit ($v \leq 1$). Für geschwindigkeiten VIEL kleiner als 1 ($v \ll 1$) bekommen wir wieder den 3 dimensionalen Impuls.

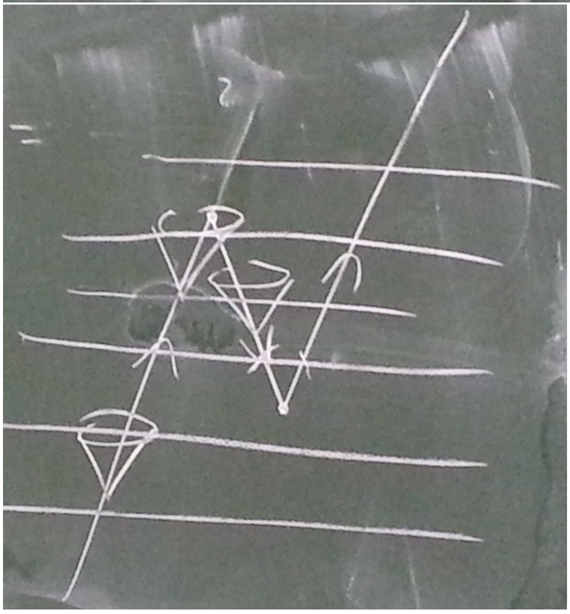
Für ein bewegtes Objekt ist es die Kinetische Energie. Für ein Ruhendes Objekt bleibt m, die Ruhe Energie. Die Gesamtenergie ist die Summe der vorigen. Wir können das Längenquadrat des Impulses bilden:

$$p^\mu = \begin{pmatrix} E \\ p^i \end{pmatrix} = m u^\mu$$









Nebenbemerkung: Antiteilchen sind Teilchen, die in die Vergangenheit gehen

4.6 Maxwell-Gleichungen im Mikowski-Raum (4rer-Strom)

Elektomagnetismus = Elektisches Feld + Magnetisches Feld. Es kann nicht nur ein vektor sein, wir haben nur 4 elemente im Vektor, wir brauchen aber 6 elemente. Das nächst-größere ist eine Matrix. Wir haben 16 Elemente, ist zu viel. Wir zerlegen in symmetrisch und antisymetrische Teile:

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

die diagonale ist 0, nur die antisymetrischen elemente $\Rightarrow 3 + 2 + 1 = 6$ elemente, perfekt. Die Zeitzeile ist das Elektische Feld. Die Raumraumeinträge sind die Magnetischen Anteile.

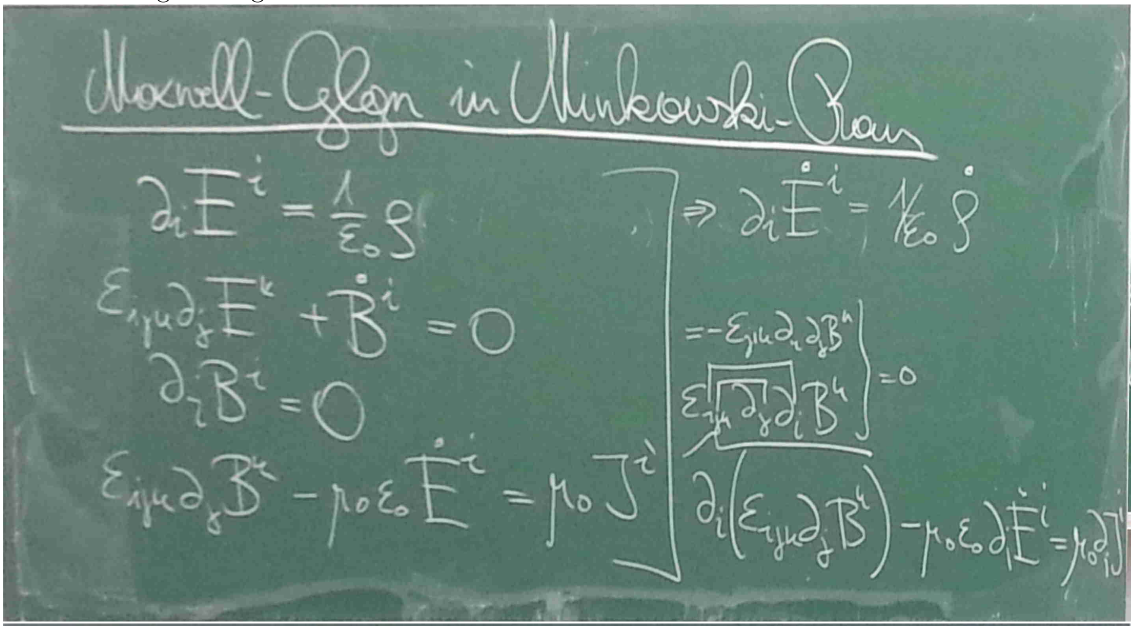
$$-\delta_j F^{ji} = \epsilon_{iju} \delta_j B^u$$

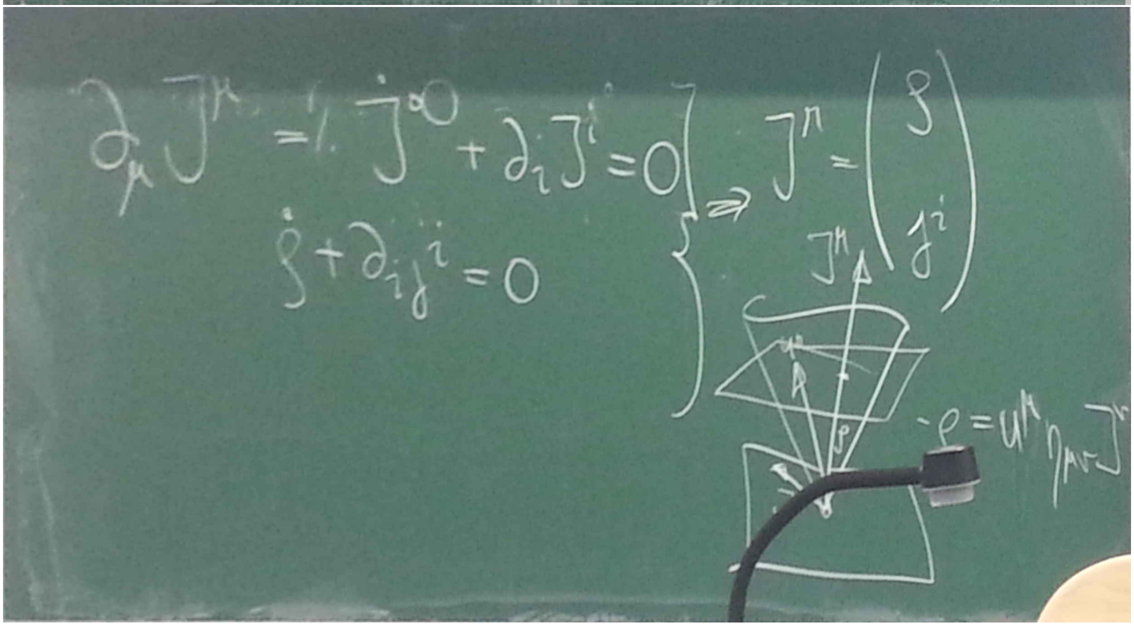
$$-\delta_j F^{ij} = \epsilon_{iju} B^u$$

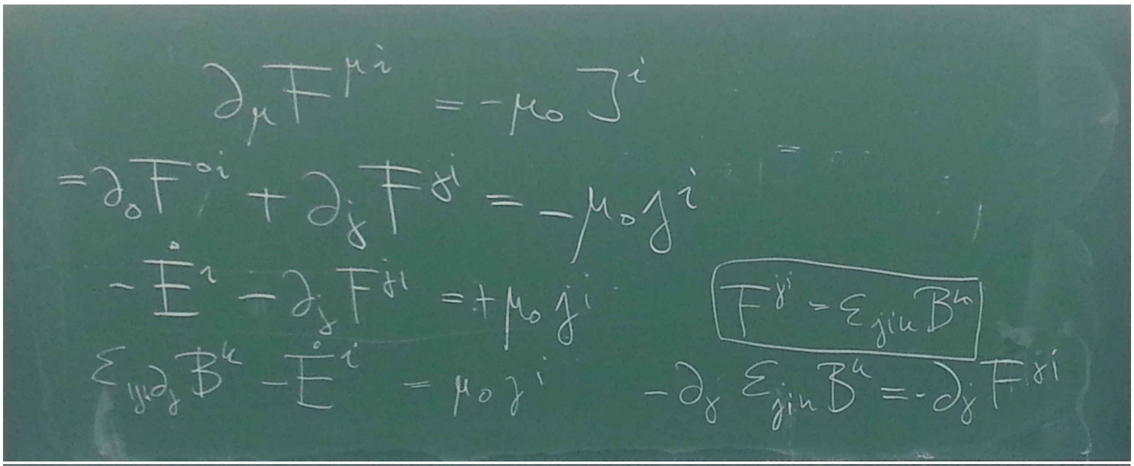
Feldstärketensor:

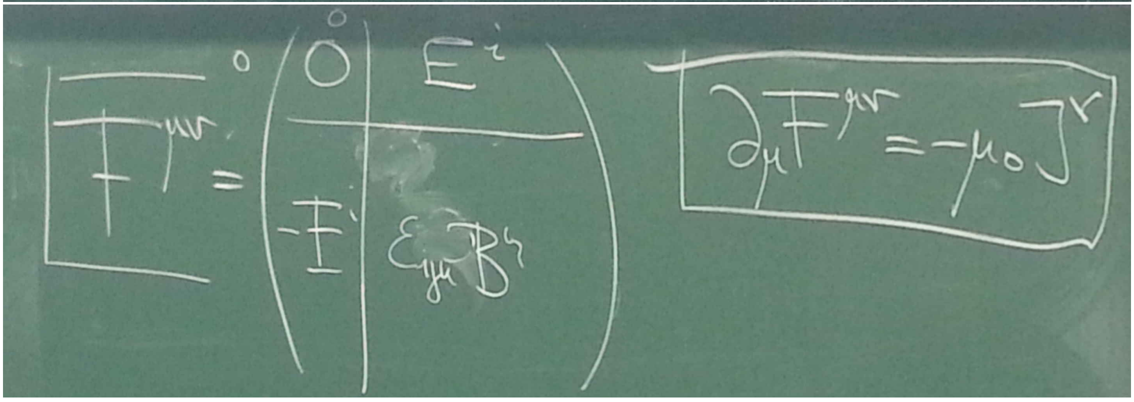
$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E^i \\ -E^i & \epsilon_{ijk} B^k \end{pmatrix}$$

Die Maxwell gleichungen werden dann:





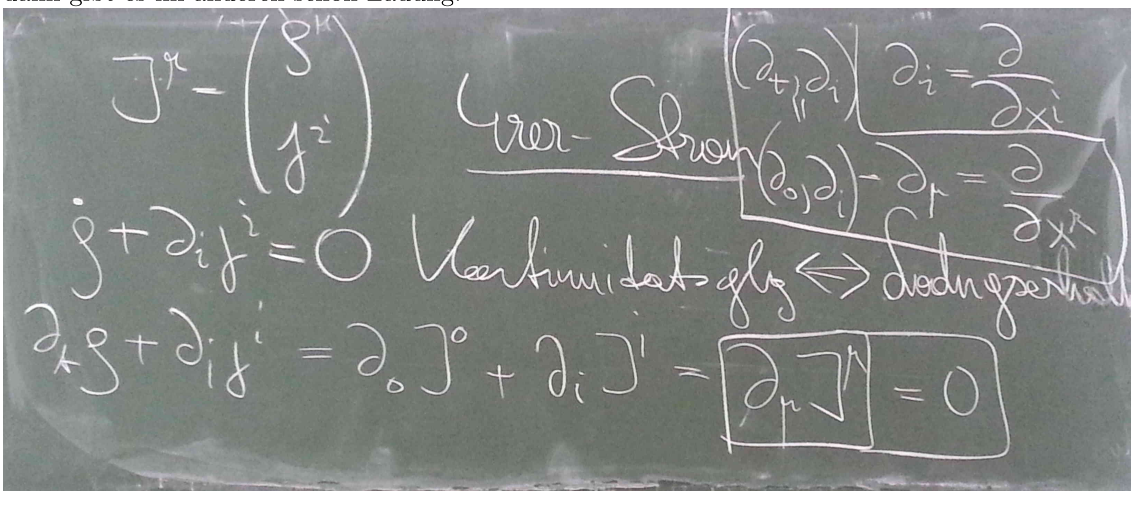


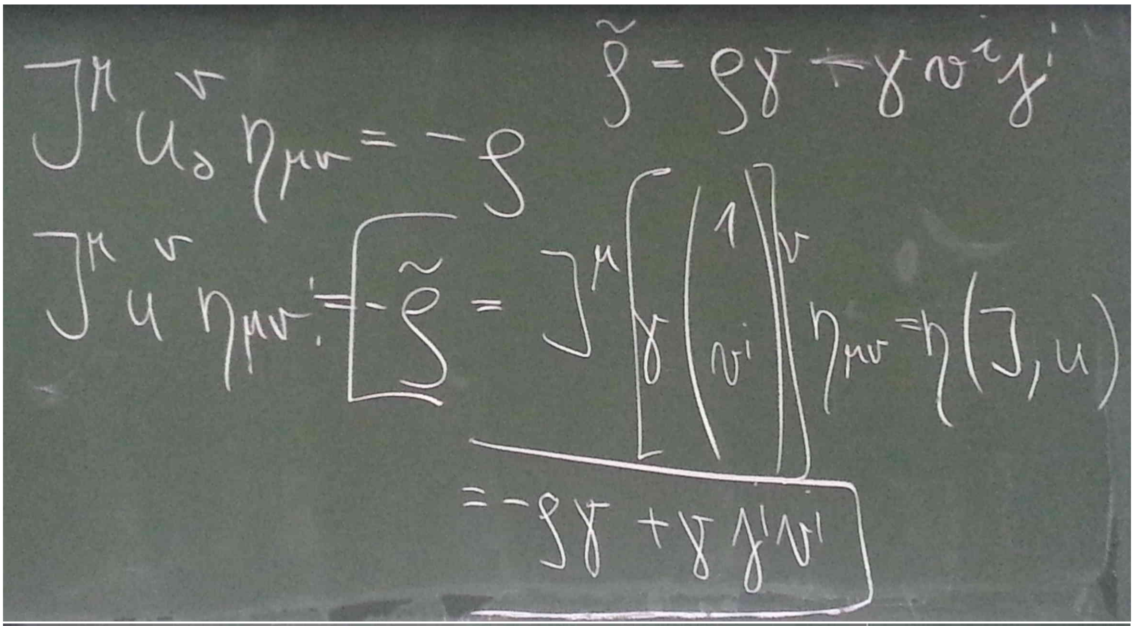


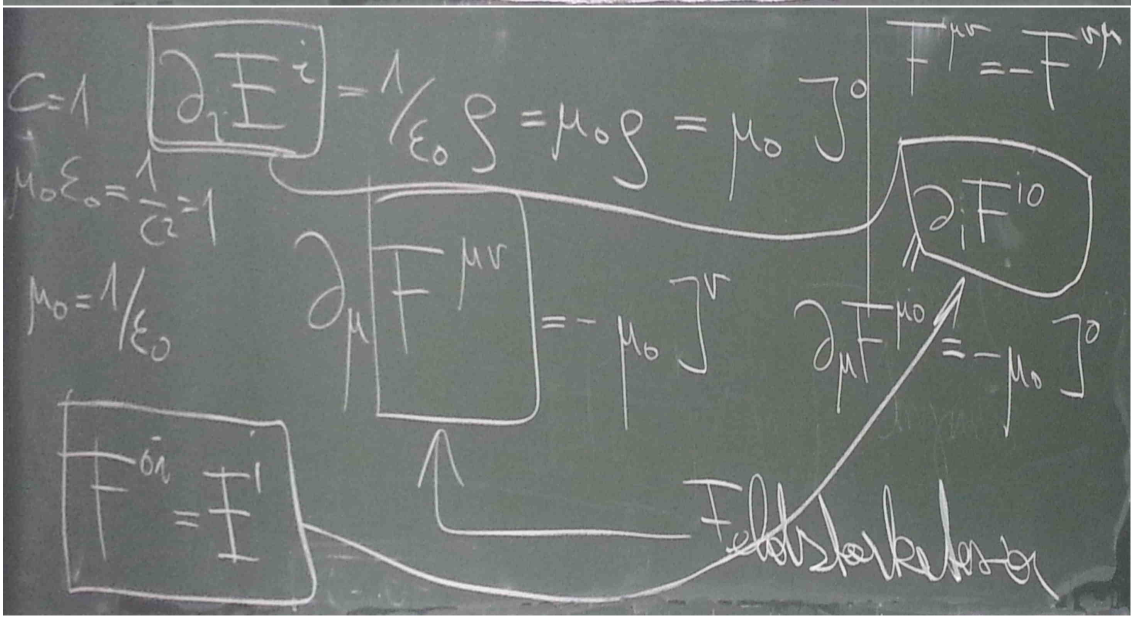
So eine Form hätten wir gerne für die Gravitation.

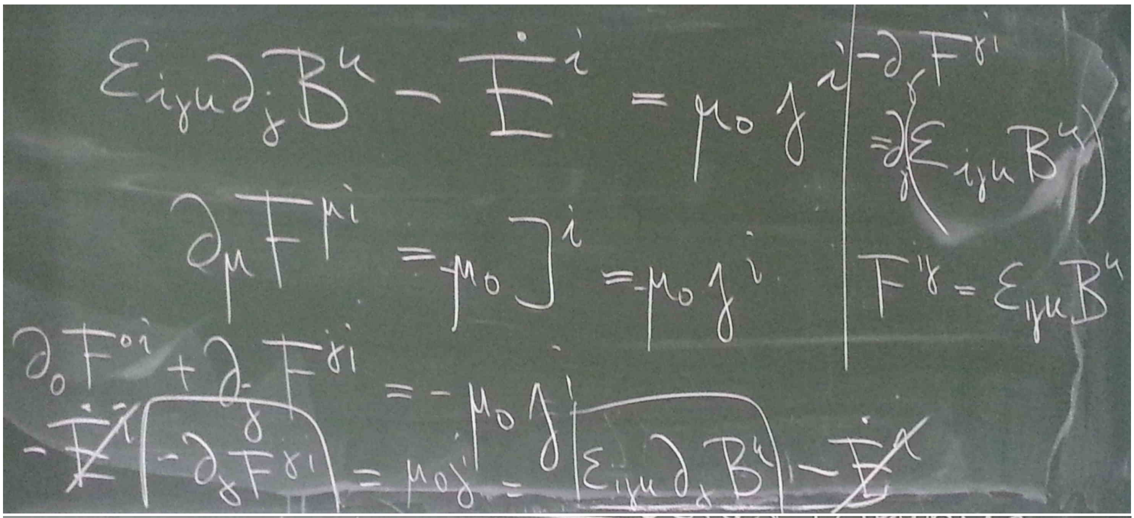
4.6.1 4rer-Strom in der letzten Vorlesung

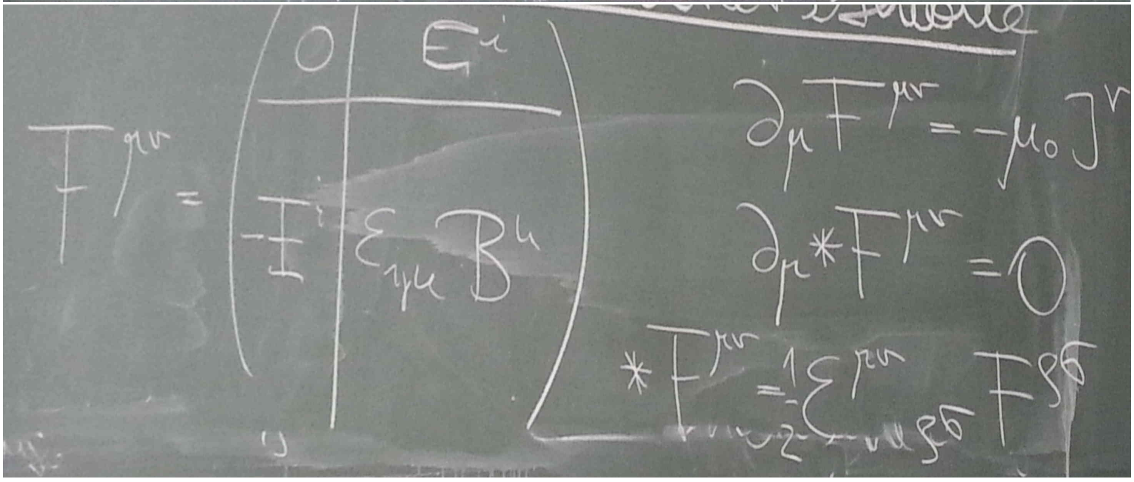
4dimensionaler Strom = Ladungsdichte und 3-dim Strom. Kontinuitätsgleichung muss erfüllt sein $\dot{\rho} + \delta_i j^i = 0$. Wenn etwas wegfließt nimmt die Ladung ab, wenn etwas zu fließt, dann nimmt die Ladung im Punkt zu. **Ladungserhaltung**. Schreiben wir es mit δ_t dann bekommen wir $\delta_\mu J^\mu = 0$. Die Ladung muss im 4dimensionalen kontinuierlich sein. In unseren Zeitschritt ist es $-\rho$, aber in ein allgemeines System u^ν ist es $-\widetilde{\gamma}$. Angenommen im Ursprünglichen System gibt es keine Ladung, dann gibt es im anderen schon Ladung.



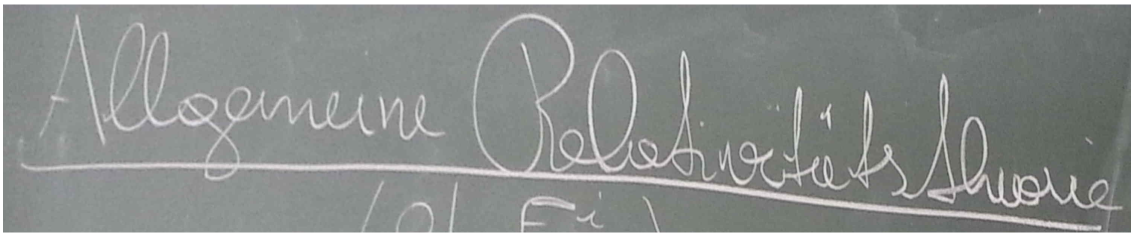

$\tilde{\rho} = \rho\gamma - \gamma v^i j^i$
$J^\mu u_0^\nu \eta_{\mu\nu} = -\rho$
$J^\mu u^\nu \eta_{\mu\nu} = -\tilde{\rho} = J^\mu \left[\gamma \begin{pmatrix} 1 \\ v^i \end{pmatrix}\right]^\nu \eta_{\mu\nu} = \eta(J, u)$
$= -\rho\gamma + \gamma j^i v^i$


$c = 1$
$\partial_i E^i = 1/\varepsilon_0\, \rho = \mu_0 \rho = \mu_0 J^0$
$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$
$\mu_0 \varepsilon_0 = \frac{1}{c^2} = 1$
$\mu_0 = 1/\varepsilon_0$
$\partial_i F^{i0}$
$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 J^\nu$
$\partial_\mu F^{\mu 0} = -\mu_0 J^0$
$F^{0i} = E^i$
Feldstärketensor





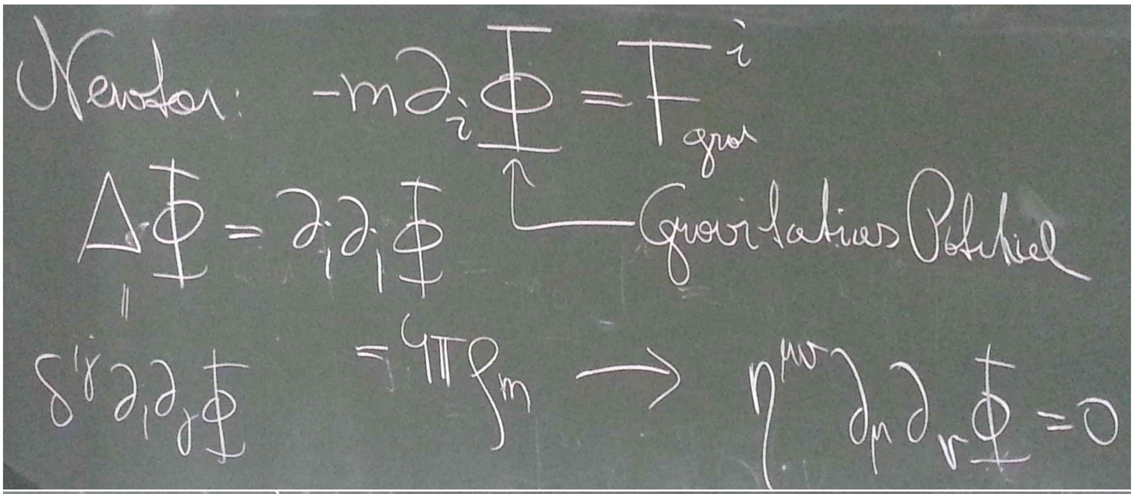
5 Die Allgemeine Relativiätstheorie

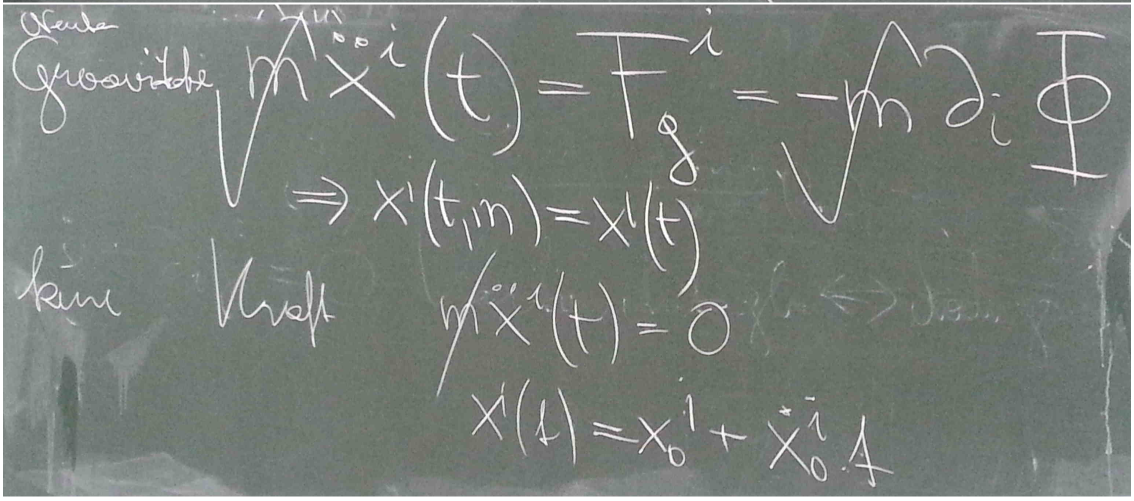


Wie kann man die anderen Kräfte in die SRT einbauen? Elektromagnetismus war *leicht*.

5.1 Gravitation

Newton: ϕ ist as Gravitationpotential, dessen Gradient mit der Masse Multipliziert die Gravitationskraft ist.

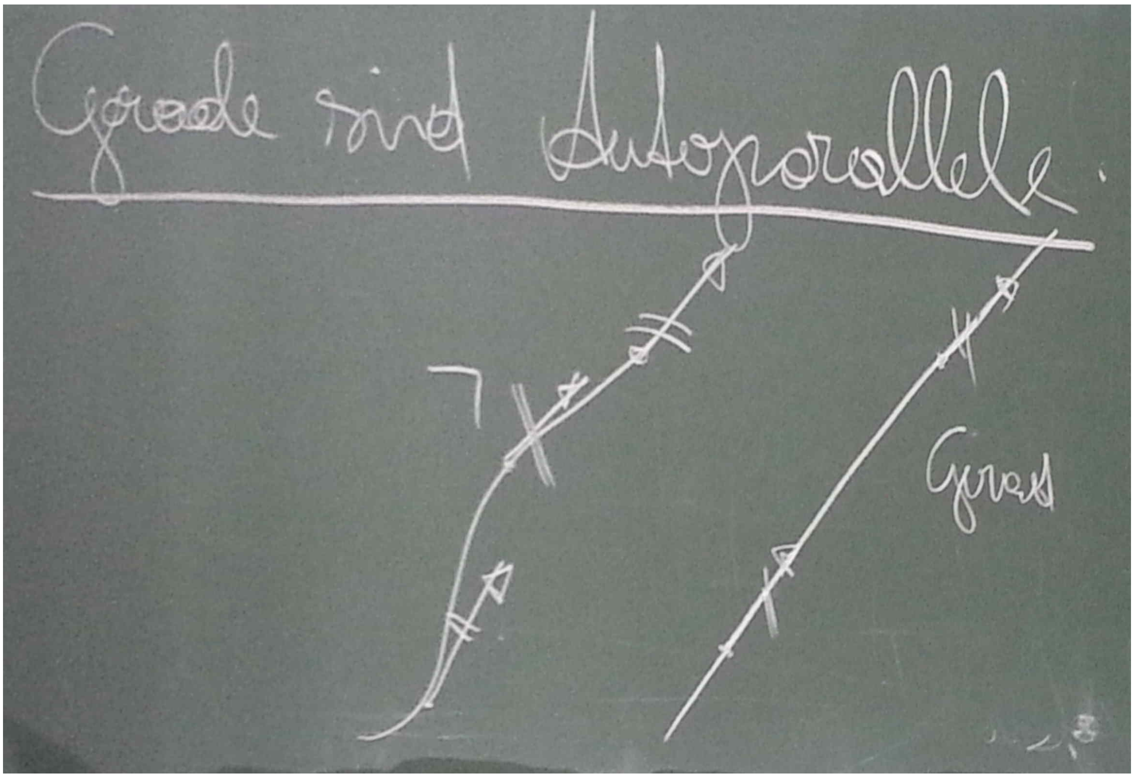




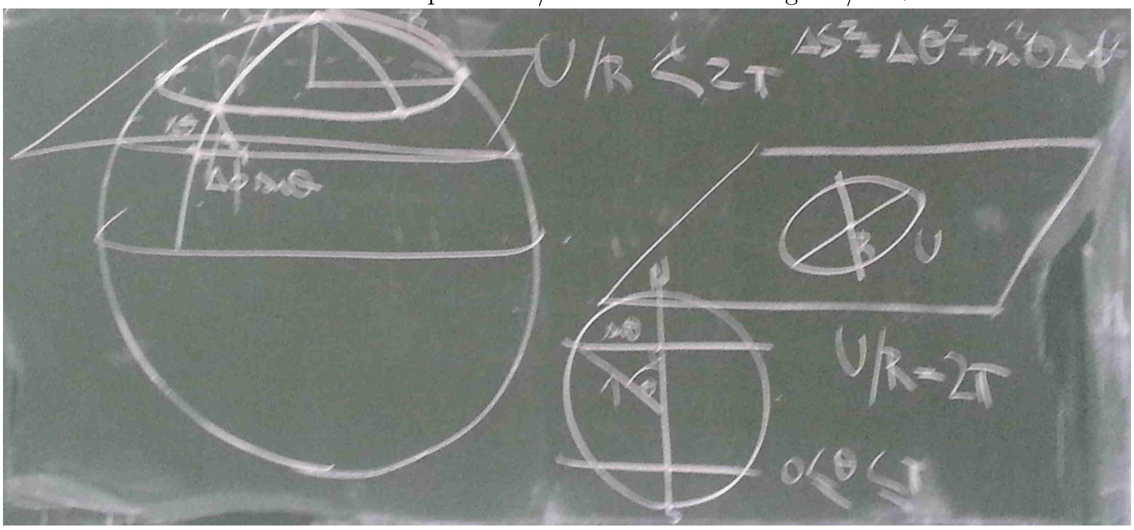
Die Divergenz (Quellstärke) vom Vektorfeld ist durch die Materiedichte gegeben. Das Dumme daran ist, dass es nur ein Bezugssystem gibt, da es raum-vektoren gibt. Einstein ist aufgefallen, dass Newton sagt, dass die Gravitation keine Kraft ist.

Wie bewegt sich Materie im Gravitationsfeld? Die Materie kürzt sich raus. Also wird sich die Lösung nicht von der Masse abhängen. Beispiel Aufzugskabine. Man wacht in einer frei fallenden Kabine auf und lässt ein Stück Kreide aus. Die Kreide fällt dann nicht nach unten. Gravitation wirkt auf alle Objekte gleich. Gravitation ist keine Kraft. Objekte bewegen sich auf der Geraden. Wodurch sind Geraden bestimmt? Gerade ist die kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten und eine Autoparalele Kurve. Die Planeten bewegen sich auf Geraden, aber nicht in einer euklidischen Ebene.

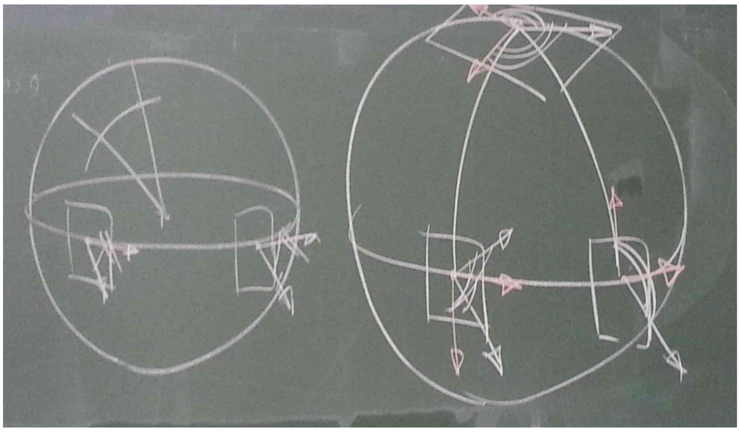
Gerade sind Autoparallele:

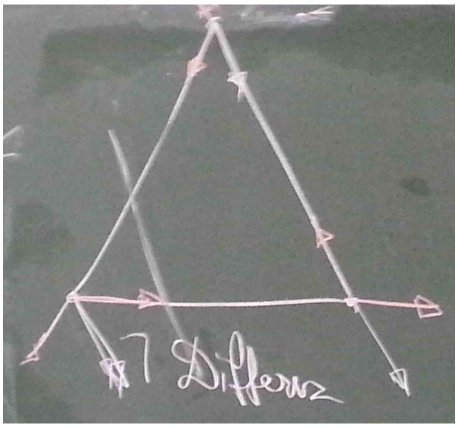


Wie kann man Feststellen, dass man nicht in einer flachen Ebene Wohnt, sondern in einem gekrümmten Raum? Beispiel Kugel und Blatt Papier. Kreise machen und den Umfang U und den Radius R messen. Auf dem Blatt Papier ist $U/R = 2\pi$. Auf der Kugel $U/R < 2\pi$

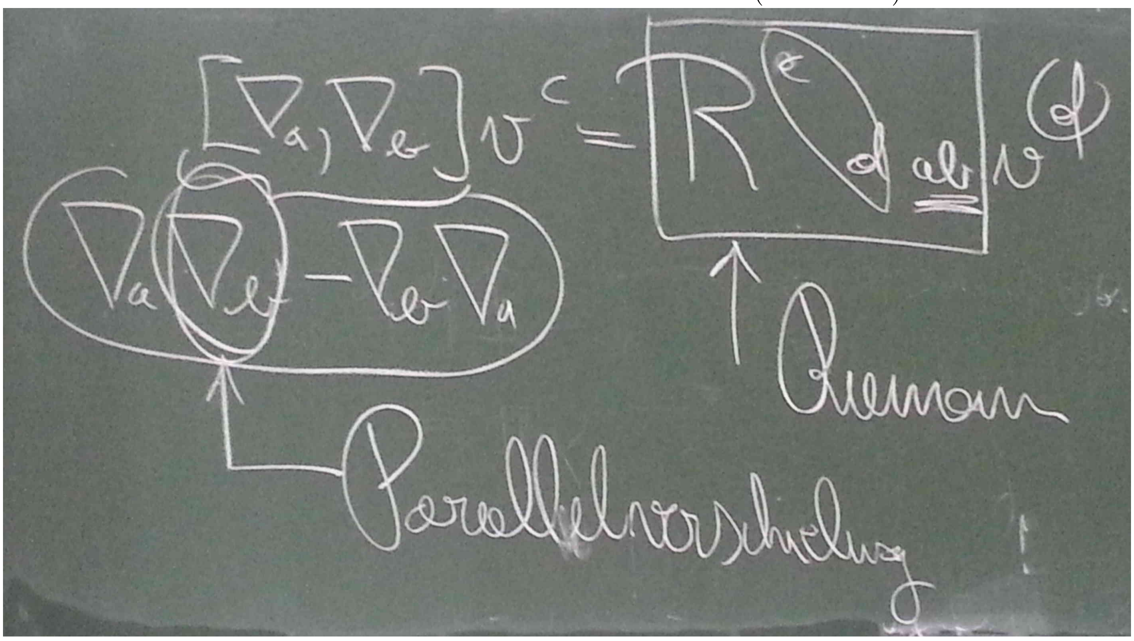


Weiteres Beispiel: parallelverschieben von Vektoren auf einer Kurve. Der Äquator ist ein Großkreis. Ein Vektor auf einem Großkreis verschoben bleibt gleich. Aber verschiebung entlang von Geraden (aber nun breitengrade) dreht sich der Vektor. Aussage der Krümmung. Das ist der Riemansche Krümmungsvektor. Im Flachen passiert das nicht. Beispiel Tafel mit Dreick.

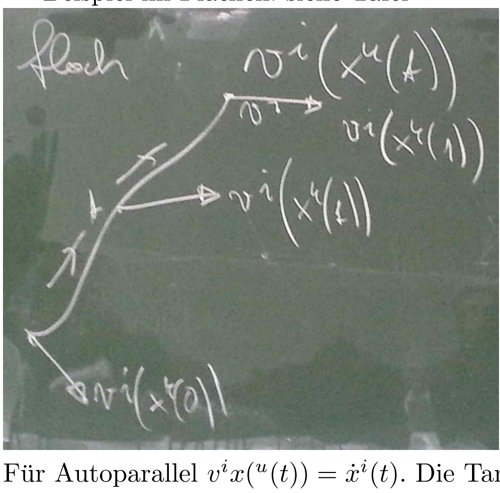


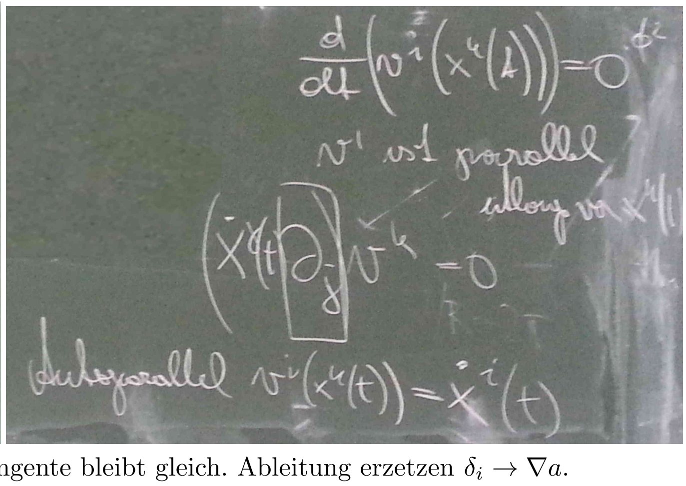


Beispiel warum 2 objekte sich gerade bewegen und sich doch aufeinander zu kommen, wegen gekrümmten Raum. Einstein hat das schwere Tensorkalkül erlernt (er war stur).



Objekt Rieman. $[\nabla_a, \nabla_b]v^c = R^c dabv^d$
Paralellverschiebung $\nabla_a \nabla_b - \nabla_b \nabla_a$
Beispiel im Flachen: siehe Tafel





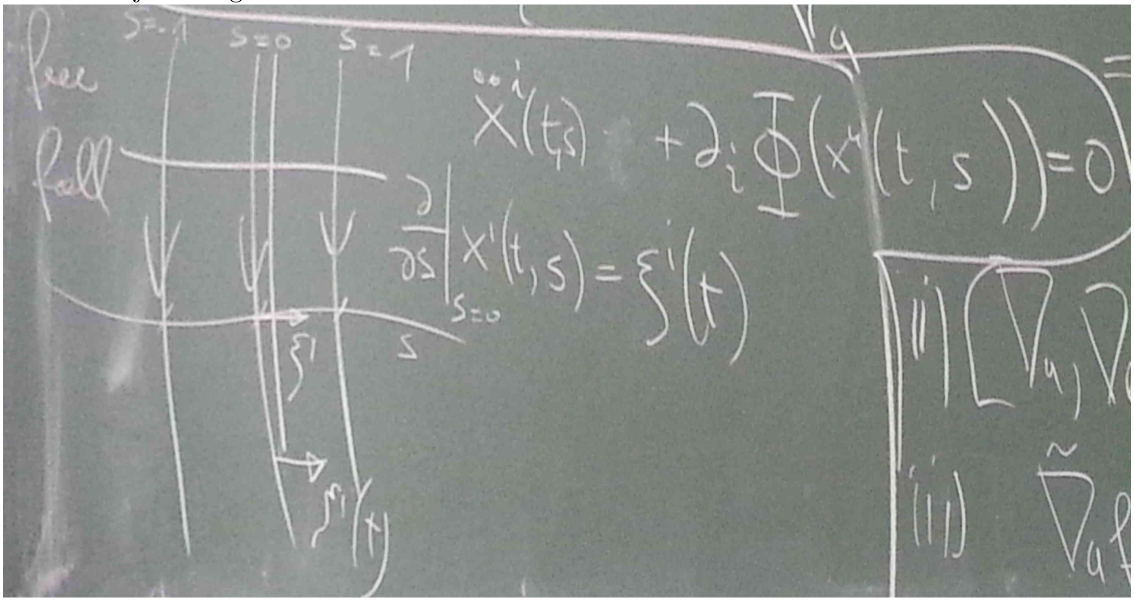
Für Autoparallel $v^i x(^u(t)) = \dot{x}^i(t)$. Die Tangente bleibt gleich. Ableitung erzetzen $\delta_i \to \nabla a$.

i) Leibniz $\Delta_u(v^b w^c) = \Delta_a v^l w^c + v^b \Delta_a w^c$

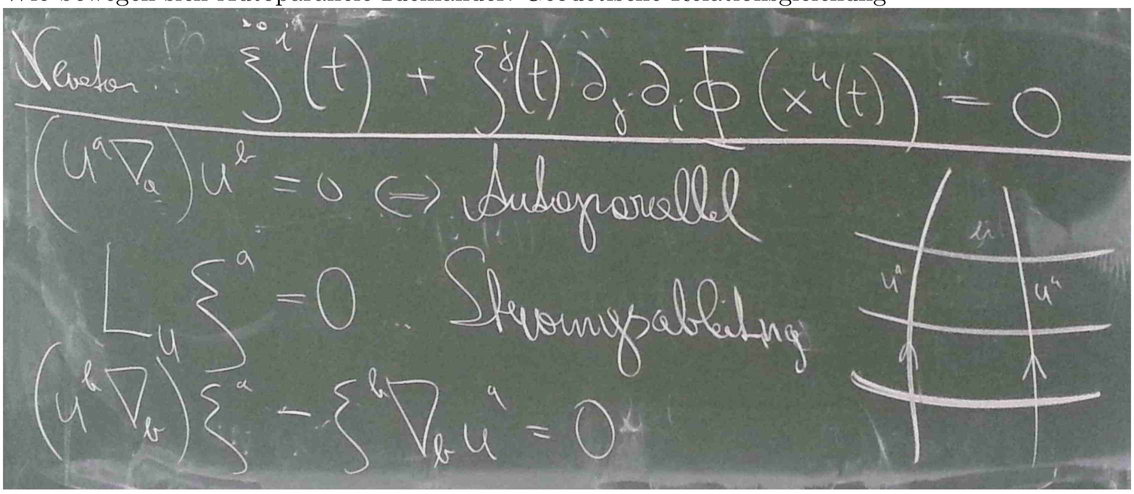
ii) auf funktionen gleich $[\Delta_a, \Delta_b] f = 0$

iii) für skalare objekte spielt es keine Rolle $\tilde{\Delta}_a f = \Delta_a f = \delta_a f$

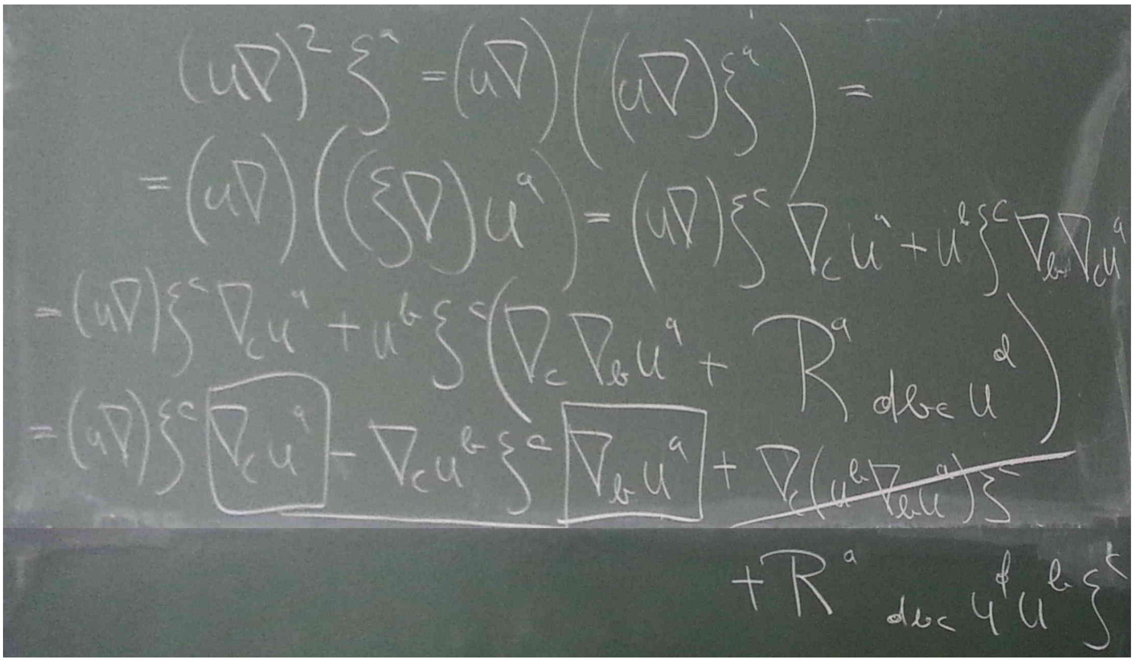
Beispiel, objekte die frei fallen. Eine Schar von Objekte. s ist selektor-parameter. Der präsentiert, welches Objekt ich gerade anschaue.



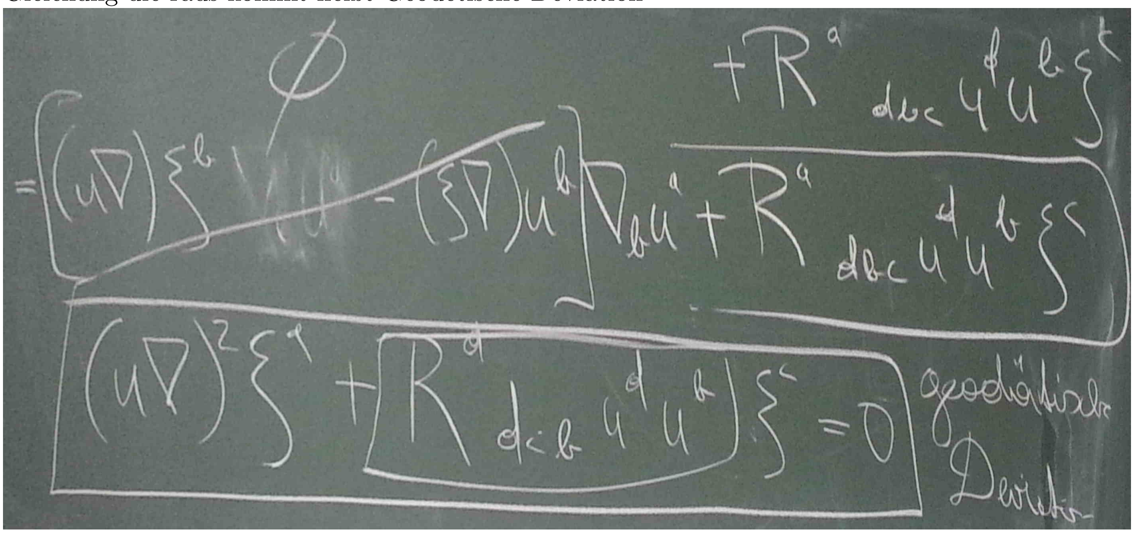
Die Beschleunigung des Zeigers wird durch den Gradienten des Gravitationspotentials geändert. Wie bewegen sich Autoparallele zueinander. Geodetische Relationsgleichung

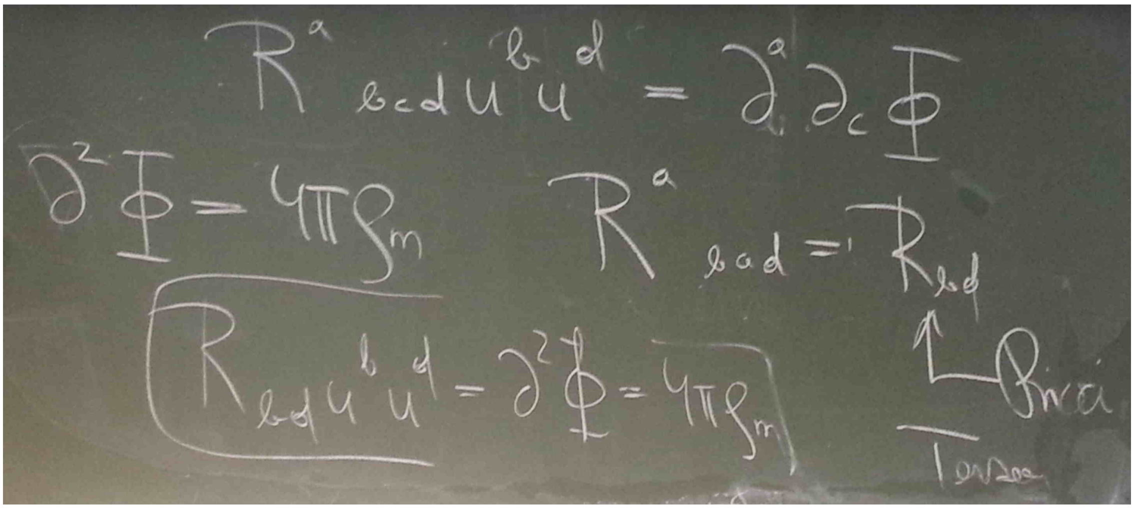


Die Strömmungsableitung soll 0 sein $L_u \theta^a = 0$. Eine Kurve, die wir auf einer 2ten linie verschieben. Wir haben die 2. Strömung durch die erste erzeugt. Die Krümmung ist an die Materiedichte gekoppelt. Der Raum sagt der Materie wie sie sich bewegen soll, die Masse sagt dem Raum wie sie sich krümmen soll. Die allgemeine Gleichung von Einstein Tafel $(u\nabla)^2 = ...$



Ableitungen wirken bei der Notation nur auf das nächste symbol, wenn nicht, dann sind Klammern gesetzt. Wir drehen die Reihenfolge von $\nabla_b \nabla_c u^a$ um, dafür bekommen wir den Rieman-tensor als Fehler. beim Raus ziehen, kommt ein term zustande, der dank der Autoparallelen regel 0 ist. Die Gleichung die raus kommt heißt Geodetische Deviation





Was Newton als Kraft sieht wird bei Einstein eine geometriesche Eigenschaft. Gravitationspotential und Rieman Objekt gleichsetzen. Ricci-faktor Energieimpulstensor ist der Energieimpulsstrom.