Theoretische Informatik und Logik
Übungsblatt 3 (2022W)
Lösungsvorschlag

Aufgabe 3.1

Drücken Sie folgende Prädikate jeweils als Boolesche Ausdrücke aus oder argumentieren Sie, warum das nicht möglich ist. Verwenden Sie dabei die **offizielle Syntax** für $\mathcal{BA}(\mathcal{D})$, d.h. keine der zusätzlichen Notationsvereinbarungen, die auf den Vorlesungsfolien erwähnt werden.
Hinweis: Versuchen Sie möglichst kurze Ausdrücke zu finden.

a) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: x ist die Quadratwurzel von $2y + 3$.

b) Über $\mathcal{D} = \mathbb{N}$: x ist eine Quadratzahl.

c) Über $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$: $x - 1 \leq y < |2x|$.

d) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: x ist eine Großtante von y.
Hinweis: Eine Großtante ist eine Schwester eines Großvaters oder einer Großmutter.

e) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: x und y sind (verschiedene) Töchter von z.

f) Über $\mathcal{D} = \text{FamX}$: x hat genau eine Tochter, nämlich y.

g) Über $\mathcal{D} = \mathbb{S}$: Entweder der Stack x ist leer oder er hat die Tiefe 3.
Hinweis: Die Tiefe eines Stacks ist die Anzahl der darin vorkommenden Stackelemente ($\in \{\underline{0}, \underline{1}\}$).

Lösung 3.1

a) $\underline{*}(\underline{\mathtt{x}},\underline{\mathtt{x}})\underline{=}\underline{+}(\underline{*}(\underline{+}(\underline{1},\underline{1}),\underline{\mathtt{y}}),\underline{+}(\underline{+}(\underline{1},\underline{1}),\underline{1}))$
Beachten Sie, dass 2 und 3 in $\mathbb{N}$ nicht als Konstantensymbole zur Verfügung stehen.

b) x ist genau dann eine Quadratzahl, wenn $\exists y\, x = y^2$. Dafür kann man die PL-Formel $\underline{\exists}\underline{\mathtt{y}}\,\underline{\mathtt{x}}\underline{=}\underline{*}(\underline{\mathtt{y}},\underline{\mathtt{y}})$ angeben. Der Existenzquantor lässt sich nicht eliminieren. Es gibt daher keinen entsprechenden Booleschen Ausdruck über $\mathbb{N}$.

c) $x - 1 \leq y$ ist äquivalent zu $\neg(y < x - 1)$ und $y < |2x|$ ist äquivalent zu $y < 0 \vee y^2 < 4x^2$. Entsprechend erhält man zum Beispiel $(\underline{\neg}\underline{\leq}(\underline{\mathtt{y}},\underline{-}(\underline{\mathtt{x}},\underline{1}))\underline{\wedge}(\underline{\leq}(\underline{\mathtt{y}},\underline{0})\underline{\vee}\underline{\leq}(\underline{*}(\underline{\mathtt{y}},\underline{\mathtt{y}}),\underline{*}(\underline{4},\underline{*}(\underline{\mathtt{x}},\underline{\mathtt{x}}))))))$.
Es gibt natürlich auch andere Lösungen. Zum Beispiel kann man die Betragsfunktion mit einer expliziten Fallunterscheidungen ausdrücken. (Fallunterscheidungen lassen sich als Boolescher Ausdruck darstellen, da 'Wenn A, dann B' äquivalent zu 'Nicht A oder B' ist.) Dafür benötigt man aber offensichtlich deutlich mehr Symbole.

d) Folgender Boolescher Ausdruck ist eine mögliche Lösung:
$(\underline{\mathit{weiblich}}(\underline{\mathtt{x}})\underline{\wedge}(\underline{\mathit{Geschwister}}(\underline{\mathtt{x}},\underline{\mathit{Vater}}(\underline{\mathit{Vater}}(\underline{\mathtt{y}})))\underline{\vee}(\underline{\mathit{Geschwister}}(\underline{\mathtt{x}},\underline{\mathit{Vater}}(\underline{\mathit{Mutter}}(\underline{\mathtt{y}})))$
$\underline{\vee}(\underline{\mathit{Geschwister}}(\underline{\mathtt{x}},\underline{\mathit{Mutter}}(\underline{\mathit{Vater}}(\underline{\mathtt{y}}))))\underline{\vee}\underline{\mathit{Geschwister}}(\underline{\mathtt{x}},\underline{\mathit{Mutter}}(\underline{\mathit{Mutter}}(\underline{\mathtt{y}}))))))))$

e) Folgender Boolescher Ausdruck ist eine mögliche Lösung:
$(((\underline{\mathit{weiblich}}(\underline{\mathtt{x}})\underline{\wedge}\underline{\mathit{weiblich}}(\underline{\mathtt{y}}))\underline{\wedge}\underline{\neg}\underline{\mathtt{x}}\underline{=}\underline{\mathtt{y}})\underline{\wedge}((\underline{\mathtt{z}}\underline{=}\underline{\mathit{Vater}}(\underline{\mathtt{x}})\underline{\wedge}\underline{\mathtt{z}}\underline{=}\underline{\mathit{Vater}}(\underline{\mathtt{y}}))\underline{\vee}$
$(\underline{\mathtt{z}}\underline{=}\underline{\mathit{Mutter}}(\underline{\mathtt{x}})\underline{\wedge}\underline{\mathtt{z}}\underline{=}\underline{\mathit{Mutter}}(\underline{\mathtt{y}}))))$

f) Um Anzahlbeschränkungen wie 'genau eine' auszudrücken braucht man Quantoren (wie in der Vorlesung erläutert, siehe Folie 401). Es gibt also keinen entsprechenden Boolschen Ausdruck.

g) $(\underline{\text{istleer?}}(\underline{\mathtt{x}})\underline{\vee}(\underline{\neg}\underline{\text{istleer?}}(\underline{\text{pop}}(\underline{\text{pop}}(\underline{\mathtt{x}})))\underline{\wedge}\underline{\text{istleer?}}(\underline{\text{pop}}(\underline{\text{pop}}(\underline{\text{pop}}(\underline{\mathtt{x}})))))$
Anmerkungen:
(1) Für jeden Term t kann $\underline{\text{istleer?}}(\underline{t})$ durch $t\underline{=}\underline{\varepsilon}$ ersetzt werden. Dadurch verringert sich die Länge des Ausdrucks jeweils um ein Symbol.
(2) Es wäre zwar nicht falsch, aber redundant, die Disjunktion explizit exklusiv zu machen, indem man zusätzlich (durch Konjunktion) ausdrückt, dass nicht beide Disjunkte wahr sind.

Aufgabe 3.2

Beweisen oder widerlegen Sie folgende Behauptungen über Terme $t \in \mathcal{T}(\mathbb{N})$ in offizieller Syntax, wobei t jeweils nur die Variable $\underline{\mathtt{x}}$ oder gar kein Variablensymbol enthält. Im positiven Fall ist ein induktiver Beweis zu erbringen; im negativen Fall ist ein Gegenbeispiel zu beschreiben. (Zur Erinnerung: $|t|_c$ bezeichnet die Anzahl der Vorkommen des Symbols c in t; $|t|$ bezeichnet die Länge von t, also die Anzahl aller Symbolvorkommen in t. I ist jeweils eine beliebige Variablenbelegung.)

Hinweis: Es ist manchmal notwendig als Induktionshypothese eine stärkere Aussage zu verwenden als die, die es eigentlich zu beweisen gilt.

a) $|t|_{\underline{(}} + |t|_{\underline{)}} \geq 2 \cdot (\max(|t|_{\underline{1}}, |t|_{\underline{0}}, |t|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 1)$.

b) $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \leq I(\underline{\mathtt{x}})$, falls $|t|_{\underline{+}} = |t|_{\underline{*}} = 0$ und $|t|_{\underline{\mathtt{x}}} > 0$.

c) $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \geq \min(|t|_{\underline{*}}, |t|_{\underline{+}})$, falls $|t|_{\underline{\dot{-}}} = |t|_{\underline{0}} = 0$ und $I(\underline{\mathtt{x}}) > 0$.

d) $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \leq |t|^{2 \cdot (I(\underline{\mathtt{x}}) + |t|_{\underline{1}})}$.

Lösung 3.2

a) Wir argumentieren durch Induktion gemäß des Aufbaus von t (strukturelle Induktion):

Induktionsanfang: $t = \underline{1}$ oder $t = \underline{0}$ oder $t = \underline{\mathtt{x}}$. In allen drei Fällen gilt $\max(|t|_{\underline{1}}, |t|_{\underline{0}}, |t|_{\underline{\mathtt{x}}}) = 1$, somit $2 \cdot (\max(|t|_{\underline{1}}, |t|_{\underline{0}}, |t|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 1) = 2 \cdot 0 = 0$. Daher gilt die Behauptung für die kleinstmöglichen Terme.

Induktionsschritt. t hat die Form $\circ\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$, wobei $\circ \in \{\underline{+}, \underline{*}, \underline{\dot{-}}\}$.
Die *Induktionsannahme* (IH) besagt:

$$|t_i|_{\underline{(}} + |t_i|_{\underline{)}} \geq 2 \cdot (\max(|t_i|_{\underline{1}}, |t_i|_{\underline{0}}, |t_i|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 1) \text{ für } i \in \{1, 2\}.$$

Es gilt $|t|_{\underline{(}} + |t|_{\underline{)}} = 2 + |t_1|_{\underline{(}} + |t_1|_{\underline{)}} + |t_2|_{\underline{(}} + |t_2|_{\underline{)}}$
$\geq^{IH} 2 + 2 \cdot (\max(|t_1|_{\underline{1}}, |t_1|_{\underline{0}}, |t_1|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 1) + 2 \cdot (\max(|t_2|_{\underline{1}}, |t_2|_{\underline{0}}, |t_2|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 1)$
$= 2 + 2 \cdot \max(|t_1|_{\underline{1}}, |t_1|_{\underline{0}}, |t_1|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 2 + 2 \cdot \max(|t_2|_{\underline{1}}, |t_2|_{\underline{0}}, |t_2|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 2$
$= 2 \cdot \max(|t_1|_{\underline{1}}, |t_1|_{\underline{0}}, |t_1|_{\underline{\mathtt{x}}}) + 2 \cdot \max(|t_2|_{\underline{1}}, |t_2|_{\underline{0}}, |t_2|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 2$
$\geq 2 \cdot \max(|t_1|_{\underline{1}} + |t_2|_{\underline{1}}, |t_1|_{\underline{0}} + |t_2|_{\underline{0}}, |t_1|_{\underline{\mathtt{x}}} + |t_2|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 2$
$= 2 \cdot (\max(|t_1|_{\underline{1}} + |t_2|_{\underline{1}}, |t_1|_{\underline{0}} + |t_2|_{\underline{0}}, |t_1|_{\underline{\mathtt{x}}} + |t_2|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 1)$
$= 2 \cdot (\max(|t|_{\underline{1}}, |t|_{\underline{0}}, |t|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 1)$.
($\geq^{IH}$ bezeichnet die Stelle an der die Induktionsannahme benutzt wird.)

Zusammenfassend gilt also die Aussage $|t|_{\underline{(}} + |t|_{\underline{)}} \geq 2 \cdot (\max(|t|_{\underline{1}}, |t|_{\underline{0}}, |t|_{\underline{\mathtt{x}}}) - 1)$, die zu beweisen war.

b) Die Aussage gilt nicht. Für $t = \underline{\dot{-}}\underline{(}\underline{1}\underline{,}\underline{\mathtt{x}}\underline{)}$ gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = 1$, falls $I(\underline{\mathtt{x}}) = 0$. Obwohl $|t|_{\underline{+}} = |t|_{\underline{*}} = 0$ und $|t|_{\underline{\mathtt{x}}} > 0$ zutrifft, ist daher $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \leq I(\underline{\mathtt{x}})$ für diesen Term t und diese Umgebung I falsch.

c) Wir führen einen Induktionsbeweis für die stärkere Behauptung $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \geq |t|_{\underline{+}} + 1$, falls $|t|_{\underline{\dot{-}}} = |t|_{\underline{0}} = 0$ und $I(\underline{\mathtt{x}}) > 0$.

Induktionsanfang. Wegen $|t|_{\underline{0}} = 0$ bleiben 2 Fälle.

(1) $t = \underline{1}$: Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = 1$. Wegen $|t|_{\underline{+}} = 0$ gilt daher $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \geq |t|_{\underline{+}} + 1$.

(2) $t = \underline{\mathtt{x}}$: Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = I(x) > 0$. Wegen $|t|_{\underline{+}} = 0$ gilt daher wiederum $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \geq |t|_{\underline{+}} + 1$.

Induktionsschritt. $t = \circ\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$, wobei $\circ \in \{\underline{+}, \underline{*}\}$.
Die *Induktionsannahme* besagt:

$$\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t_i) \geq |t_i|_{\underline{+}} + 1, \text{ falls } |t_i|_{\underline{\dot{-}}} = |t_i|_{\underline{0}} = 0 \text{ und } I(\underline{\mathtt{x}}) > 0, \text{ für } i \in \{1, 2\}.$$

Wir betrachten die beiden möglichen Fälle getrennt.

(1) $t = \underline{+}\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$: Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t_1) + \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t_2) \geq^{IH} |t_1|_{\underline{+}} + 1 + |t_2|_{\underline{+}} + 1 = |t_1|_{\underline{+}} + |t_2|_{\underline{+}} + 2 = |t|_{\underline{+}} - 1 + 2 = |t|_{\underline{+}} + 1$.

(2) $t = \underline{*}\underline{(}t_1\underline{,}t_2\underline{)}$: Es gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t_1) \cdot \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t_2) \geq^{IH} (|t_1|_{\underline{+}} + 1) \cdot (|t_2|_{\underline{+}} + 1) = |t_1|_{\underline{+}} \cdot |t_2|_{\underline{+}} + |t_1|_{\underline{+}} + |t_2|_{\underline{+}} + 1 \geq |t_1|_{\underline{+}} + |t_2|_{\underline{+}} + 1 = |t|_{\underline{+}} + 1$.

($\geq^{IH}$ bezeichnet wiederum die Stellen, an denen die Induktionsannahme benutzt wird.)

Zusammenfassend gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) \geq |t|_{\underline{+}} + 1 \geq \min(|t|_{\underline{*}}, |t|_{\underline{+}})$, falls $|t|_{\underline{\dot{-}}} = |t|_{\underline{0}} = 0$ und $I(\underline{\mathtt{x}}) > 0$.

d) Die Aussage gilt nicht. Man erhält ein Gegenbeispiel für $t = \underline{\mathtt{x}}$ und eine Umgebung I mit $I(\underline{\mathtt{x}}) > 1$, denn dann gilt $\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, t) = I(\underline{\mathtt{x}}) > 1$ aber $|t|^m = 1^m = 1$ für beliebige $m \in \omega$.

Aufgabe 3.3

a) Geben Sie ein $AL(\mathbb{Z})$-Programm α an, das $(2x+3) \bmod (y+1)$ berechnet, falls $x, y \geq 0$.
Genauer: α soll die Variablen $\underline{\mathtt{x}}$, $\underline{\mathtt{y}}$ und $\underline{\mathtt{z}}$ enthalten und es muss $(2 \cdot I(\underline{\mathtt{x}}) + 3) \bmod (I(\underline{\mathtt{y}}) + 1) = J(\underline{\mathtt{z}})$ gelten, wobei $J = \mathcal{M}_{AL}(I, \alpha)$.

b) Weisen Sie analog zu Folie 368 schrittweise nach, dass $\alpha \in AL(\mathbb{Z})$.

c) Werten Sie α schrittweise in einer Umgebung I aus, in der $I(\underline{\mathtt{x}}) = 2$ und $I(\underline{\mathtt{y}}) = 2$ gilt.

Hinweis: Sie dürfen von den Notationsvereinbarungen (insbesondere Infix-Notation, siehe Folie 363) Gebrauch machen, sollten aber Unterstreichungen beibehalten um den Syntax/Semantik-Unterschied sichtbar zu machen.

Lösung 3.3

a)
$$\begin{aligned}\alpha = \ & \underline{\mathtt{begin}} \\ & \underline{\mathtt{z}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathtt{2}} \underline{*} \underline{\mathtt{x}} \underline{+} \underline{\mathtt{3}}; \\ & \underline{\mathtt{while}}\ \underline{\mathtt{z}} \underline{\geq} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}}\ \underline{\mathtt{do}}\ \ \underline{\mathtt{z}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathtt{z}} \underline{-} \underline{(} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}} \underline{)} \\ & \underline{\mathtt{end}}\end{aligned}$$

b) Wir verwenden folgende Abkürzung:
$\beta = \underline{\mathtt{while}}\ \underline{\mathtt{z}} \underline{\geq} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}}\ \underline{\mathtt{do}}\ \ \underline{\mathtt{z}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathtt{z}} \underline{-} \underline{(} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}} \underline{)}$

Entlang der induktiven Definition von $AL(\mathcal{D})$-Programmen ergibt sich folgende 'bottom-up' Syntaxanalyse (= schrittweiser Nachweis von $\alpha \in AL(\mathbb{Z})$).

(1) Wegen $\underline{\mathtt{z}} \in IVS$ und $\underline{\mathtt{2}} \underline{*} \underline{\mathtt{x}} \underline{+} \underline{\mathtt{3}} \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}) \overset{AL1}{\Longrightarrow} \underline{\mathtt{z}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathtt{2}} \underline{*} \underline{\mathtt{x}} \underline{+} \underline{\mathtt{3}} \in AL(\mathbb{Z})$.

(2) Wegen $\underline{\mathtt{z}} \in IVS$ und $\underline{\mathtt{z}} \underline{-} \underline{(} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}} \underline{)} \in \mathcal{T}(\mathbb{Z}) \overset{AL1}{\Longrightarrow} \underline{\mathtt{z}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathtt{z}} \underline{-} \underline{(} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}} \underline{)} \in AL(\mathbb{Z})$.

(3) Wegen $\underline{\mathtt{z}} \underline{\geq} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}} \in \mathcal{BA}(\mathbb{Z})$ und (2) $\overset{AL4}{\Longrightarrow} \beta \in AL(\mathbb{Z})$.

(4) Wegen (1) und (3) $\overset{AL2}{\Longrightarrow} \alpha = \underline{\mathtt{begin}}\ \underline{\mathtt{z}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathtt{2}} \underline{*} \underline{\mathtt{x}} \underline{+} \underline{\mathtt{3}} \underline{;} \beta\ \underline{\mathtt{end}} \in AL(\mathbb{Z})$.

c)
$$\begin{aligned}
& \mathcal{M}_{AL}(I, \alpha) = \mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\mathtt{begin}}\ \underline{\mathtt{z}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathtt{2}} \underline{*} \underline{\mathtt{x}} \underline{+} \underline{\mathtt{3}} \underline{;} \beta\ \underline{\mathtt{end}}) \\
\overset{MAL2}{=}\ & \mathcal{M}_{AL}(I', \beta), \\
& \text{wobei } I' \overset{MAL1}{=} \mathcal{M}_{AL}(I, \underline{\mathtt{z}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathtt{2}} \underline{*} \underline{\mathtt{x}} \underline{+} \underline{\mathtt{3}}),\ \text{daher } I'(\underline{\mathtt{z}}) = \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I, \underline{\mathtt{2}} \underline{*} \underline{\mathtt{x}} \underline{+} \underline{\mathtt{3}}) = 2 \cdot I(\underline{\mathtt{x}}) + 3 = 7, \\
& I'(v) = I(v) \text{ für alle } v \neq \underline{\mathtt{z}} \\
& \Big[\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I', \underline{\mathtt{z}} \underline{\geq} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathtt{z}}) \geq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I', \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}})] = [7 \geq 2+1] = [7 \geq 3] = \mathbf{t}\ \Big] \\
\overset{MAL4}{=}\ & \mathcal{M}_{AL}(I'', \beta), \\
& \text{wobei } I'' = \mathcal{M}_{AL}(I', \underline{\mathtt{z}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathtt{z}} \underline{-} \underline{(} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}} \underline{)}) \\
& \text{daher } I''(\underline{\mathtt{z}}) = I'(\underline{\mathtt{z}}) - (I'(\underline{\mathtt{y}}) + 1) = 7 - (2+1) = 4,\ I''(v) = I'(v) \text{ für alle } v \neq \underline{\mathtt{z}} \\
& \Big[\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I'', \underline{\mathtt{z}} \underline{\geq} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'', \underline{\mathtt{z}}) \geq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I'', \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}})] = [4 \geq 2+1] = [4 \geq 3] = \mathbf{t}\ \Big] \\
\overset{MAL4}{=}\ & \mathcal{M}_{AL}(I''', \beta), \\
& \text{wobei } I''' = \mathcal{M}_{AL}(I'', \underline{\mathtt{z}} \underline{\leftarrow} \underline{\mathtt{z}} \underline{-} \underline{(} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}} \underline{)}) \\
& \text{daher } I'''(\underline{\mathtt{z}}) = I''(\underline{\mathtt{z}}) - (I''(\underline{\mathtt{y}}) + 1) = 4 - (2+1) = 1,\ I'''(v) = I''(v) \text{ für alle } v \neq \underline{\mathtt{z}} \\
& \Big[\ \mathcal{M}_{\mathcal{BA}}(I''', \underline{\mathtt{z}} \underline{\geq} \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}}) = [\mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I''', \underline{\mathtt{z}}) \geq \mathcal{M}_{\mathcal{T}}(I''', \underline{\mathtt{y}} \underline{+} \underline{\mathtt{1}})] = [1 \geq 2+1] = [1 \geq 3] = \mathbf{f}\ \Big] \\
\overset{MAL4}{=}\ & I'''
\end{aligned}$$

Es gilt daher $J(\underline{\mathtt{z}}) = I'''(\underline{\mathtt{z}}) = 1$, übereinstimmend mit $(2 \cdot I(\underline{\mathtt{x}}) + 3) \bmod (I(\underline{\mathtt{y}}) + 1) = 7 \bmod 3 = 1$.

Aufgabe 3.4

Spezifizieren Sie zu folgenden Formeln jeweils ein Modell $\mathcal{I}$ und ein Gegenbeispiel $\mathcal{J}$ über dem angegebenen Gegenstandsbereich D. Argumentieren Sie jeweils, warum $\mathcal{I}$ ein Modell und $\mathcal{J}$ ein Gegenbeispiel ist. Geben Sie außerdem an, welche Variablen frei und welche gebunden in der jeweiligen Formel vorkommen.
Beachten Sie die in der Vorlesung (auf Folie 321) eingeführten Notationsvereinbarungen.

a) Über $D = \{0, 1\}$: $\forall y [P(a, y, x) \supset \exists z P(x, b, z)] \vee \forall x P(g(y), x, a)$

b) Über $D = \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*$: $\forall x \forall y \forall z [(Q(z, x) \wedge \neg Q(z, y)) \supset Q(f(x, y), z)]$

c) Über $D = \omega$: $\forall x \forall y ([g(g(y)) = z \wedge \neg R(z, f(g(a), a))] \supset [R(f(a, x), z) \vee \neg R(z, g(z))])$

Lösung 3.4

Zur Erinnerung:

Jede Interpretation (also jedes Modell oder Gegenbeispiel) einer Formel, besteht aus 3 Bestandteilen: Dem Gegenstandsbereich D, der Signaturinterpretation Φ und der Variablenbelegung ξ. Da die Variablenbelegung nur für die *frei* vorkommenden Variablen relevant ist, ist es sinnvoll, ξ nur für letztere festzulegen.

a) Die Variable x kommt in der linken Teilformel $\forall y[P(a,y,x) \supset \exists z P(x,b,z)]$ frei vor. In der rechten Teilformel $\forall x P(g(y),x,a)$ kommt y frei vor. In der linken Teilformel kommen y und z gebunden vor. In der rechten Teilformel kommt nur x gebunden vor. (a und b sind laut den Notationsvereinbarungen keine Variablen, sondern Konstantensymbole).

   Die Formel ist eine Disjunktion; daher erhalten wir ein Modell $\mathcal{I} = \langle \{0,1\}, \Phi_\mathcal{I}, \xi_\mathcal{I} \rangle$, wenn wir für alle $m,n,p \in \{0,1\}$ $\Phi_\mathcal{I}(P)(m,n,p) = \mathbf{t}$ setzen. (Alle anderen Bestandteile von $\mathcal{I}$ spielen keine Rolle und können beliebig festgesetzt werden.) Dann gilt $\mathrm{val}_\mathcal{I}(\forall x P(g(y),x,a)) = \mathbf{t}$ und somit ist die gesamte Formel wahr unter $\mathcal{I}$.

   Für ein Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle \{0,1\}, \Phi_\mathcal{J}, \xi_\mathcal{J} \rangle$ müssen beide Disjunkte falsch werden.
   Für die Variablenbelegung $\xi_\mathcal{J}$ setzen wir $\xi_\mathcal{J}(x) = 0$ und $\xi_\mathcal{J}(y) = 0$.
   Die Signaturinterpretation $\Phi_\mathcal{J}$ sei wie folgt definiert: $\Phi_\mathcal{J}(a) = 0$ und $\Phi_\mathcal{J}(b) = 1$ und für alle $m,n,p \in \{0,1\}$: $\Phi_\mathcal{J}(g)(m) = m$, sowie

$$\Phi_\mathcal{J}(P)(m,n,p) = \begin{cases} \mathbf{t} & \text{falls } m = n = p = 0 \\ \mathbf{f} & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Das rechte Disjunkt ist falsch unter $\mathcal{J}$, da z.B. $\Phi_\mathcal{J}(P)(\Phi_\mathcal{J}(g)(\xi_\mathcal{J}(y)), 1, \Phi_\mathcal{J}(a)) = \Phi_\mathcal{J}(P)(0,1,0) = \mathbf{f}$ gilt. Das linke Disjunkt, also die All-quantifizierte Implikation $\forall y[P(a,y,x) \supset \exists z P(x,b,z)]$ ist ebenfalls falsch unter dieser Interpretation. Um das zu sehen, betrachte man zunächst die Formel ohne den All-Quantor. Da diese Teilformel eine Implikation ist, soll die linke Seite, also $P(a,y,x)$, wahr werden, aber die rechte Seite, also $\exists z P(x,b,z)$, falsch werden. Wenn man die nun freie Variable y mit 0 belegt, dann wird $P(a,y,x)$ wahr, weil $\Phi_\mathcal{J}(P)(0,0,0) = \mathbf{t}$ gilt. Bezüglich der rechten Seite beobachten wir, dass für jedes $n \in \{0,1\}$ $\Phi_\mathcal{J}(P)(0,1,n) = \mathbf{f}$ gilt. Es gibt also keine Belegung für z, die $P(x,b,z)$ wahr macht. Daher ist $\exists z P(x,b,z)$ falsch. Zusammenfassend heißt das, dass das linke Disjunkt, also $\forall y[P(a,y,x) \supset \exists z P(x,b,z)]$, ebenso wie das rechte Disjunkt $\forall x P(g(y),x,a)$ unter der Interpration $\mathcal{J}$ falsch wird. $\mathcal{J}$ ist also wirklich ein Gegenbeispiel für die gesamte Formel.

b) Die Variablen x, y und z kommen nur gebunden vor. Es gibt keine freien Variablenvorkommen.

   Für ein Modell über der Domäne der Binärstrings, $\mathcal{I} = \langle \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*, \Phi_\mathcal{I}, \xi_\mathcal{I} \rangle$, reicht es für alle $u,v \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*$ $\Phi_\mathcal{I}(Q)(u,v) = \mathbf{t}$ zu setzen. Alle weiteren Festlegungen für $\mathcal{I}$ kann man beliebig wählen, da die rechte Seite der Implikation unter dieser Interpretation immer wahr ist. Daher ist auch die gesamte Formel wahr.

   Für ein Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*, \Phi_\mathcal{J}, \xi_\mathcal{J} \rangle$ interpretieren wir Q als 'ist kürzer als'. Wir setzen also fest: $\Phi_\mathcal{J}(Q)(u,v) = \mathbf{t} \iff |u| < |v|$ für alle $u,v \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*$. Das Funktionssymbol f interpretieren wir als die Konkatenation; also $\Phi_\mathcal{J}(f)(u,v) = uv$ für alle $u,v \in \{\underline{\mathtt{a}}, \underline{\mathtt{b}}\}^*$.

   Die Formel ist all-quantifiziert; damit sie wahr wird, muss sie für jede Belegung ξ von x,y,z wahr werden. Wenn wir $\xi(x) = \underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}$, $\xi(y) = \underline{\mathtt{b}}$ und $\xi(z) = \underline{\mathtt{a}}$ setzen, dann wird die linke Seite der Implikation, also $Q(z,x) \wedge \neg Q(z,y)$ wahr, weil $|\underline{\mathtt{a}}| < |\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}|$ und $|\underline{\mathtt{a}}| \geq |\underline{\mathtt{b}}|$ gilt. Hingegen wird die rechte Seite, also $Q(f(x,y),z)$, falsch, weil $|\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}\underline{\mathtt{b}}| < |\underline{\mathtt{a}}|$ falsch ist. Also ist die gesamte Formel unter $\mathcal{J}$ falsch.

   Zur Erinnerung: Da keine Variablen frei in der Formel vorkommen, sind die Variablenbelegungen $\xi_\mathcal{I}$ und $\xi_\mathcal{J}$ hier jeweils irrelevant und können daher ganz beliebig gesetzt werden.

c) Die Variable z kommt nur frei vor. Die Variablen x und y kommen nur gebunden vor. (a ist keine Variable, sondern ein Konstantensymbol.)

   Um ein Modell $\mathcal{I} = \langle \omega, \Phi_\mathcal{I}, \xi_\mathcal{I} \rangle$ zu erhalten, genügt es die rechte Seite der Implikation, also die Disjunktion $[R(f(a,x),z) \vee \neg R(z,g(z))]$ immer zu $\mathbf{t}$ auswerten zu lassen. Dazu wiederum genügt es, z.B., $\Phi_\mathcal{I}(R)(m,n) = \mathbf{t}$ für alle $m,n \in \omega$ zu setzen. (Alle anderen Bestandteile von $\mathcal{I}$ sind beliebig.)

   Für ein Gegenbeispiel $\mathcal{J} = \langle \omega, \Phi_\mathcal{J}, \xi_\mathcal{J} \rangle$ setzen wir $\Phi_\mathcal{J}(R)(m,n) = \mathbf{t} \iff m < n$, $\Phi_\mathcal{J}(f)(m,n) = 0$ und $\Phi_\mathcal{J}(g)(m) = 1 \dot{-} m$, jeweils für alle $m,n \in \omega$. Außerdem setzen wir $\xi(z) = 0$. Unter dieser Interpretation drückt die Formel folgenden Satz aus: "Für alle y, wenn $1 \dot{-} (1 \dot{-} y) = 0$ und $0 \geq 0$, dann $[0 < 0$ oder $0 \geq 1 \dot{-} 0]$". (Der All-Quantor über x ist hier redundant.) Das heißt, die rechte Seite der Implikation ist (unabhängig von der Belegung für y) unter $\mathcal{J}$ falsch. Wenn wir nun $y = 0$ setzen, dann ist die linke Seite der Implikation wahr, weil $1 \dot{-} 0 = 1$, $1 \dot{-} 1 = 0$ und somit $1 \dot{-} (1 \dot{-} y) = 0$ gilt. Somit ist die gesamte Formel, also die all-quantifizierte Implikation, in $\mathcal{J}$ falsch.

Aufgabe 3.5
Formalisieren Sie folgende Sätze als PL-Formeln. Wählen Sie dabei jeweils zunächst eine geeignete Signatur und geben Sie die Kategorie (inklusive Stelligkeit) und die intendierte Bedeutung aller Elemente der Signatur vollständig an.

a) Anna ist die Mutter einer einzigen Tochter und Annas Vater hat auch nur diese eine Enkelin.

b) Jede Informatikerin kennt einen Tierarzt, der manche kleine, aber keine großen Tiere behandelt.

c) Es gibt Manager, die keiner Person außer sich selbst vertrauen.

d) Abas hat nur eine Nichte, aber mehr als drei Neffen.

e) Jede Technikerin träumt von einer Firma, in der nur kreative und freundliche Menschen arbeiten.

Lösung 3.5

a) Eine mögliche Lösung hat die Signatur $\langle\{W\},\{a\},\{m,v\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbol:
$W(x)$ ... x ist weiblich (einstellig)
Konstantensymbol:
a ... Anna
Funktionssymbole:
$m(x)$ ... die Mutter von x (einstellig)
$v(x)$ ... der Vater von x (einstellig)
PL-Formel:
$$\exists x[W(x) \wedge a = m(x) \wedge \forall y((W(y) \wedge a = m(y)) \supset x = y) \wedge \forall z(((v(a) = v(m(z)) \vee v(a) = v(v(z))) \wedge W(z)) \supset z = x)]$$

Eine alternative Lösung, die weniger Vorwissen über die Bedeutung von 'Mutter', 'Vater', 'Tochter' und 'Enkelin' voraussetzt, hat die Signatur $\langle\{M,V,T,E\},\{a\},\{\}\rangle$ mit folgender Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$M(x,y)$ ... x ist Mutter von y (zweistellig)
$V(x,y)$ ... x ist Vater von y (zweistellig)
$T(x,y)$ ... x ist Tochter von y (zweistellig)
$E(x,y)$ ... x ist Enkelin von y (zweistellig)
Konstantensymbol:
a ... Anna
PL-Formel:
$$\exists x[M(a,x) \wedge T(x,a) \wedge \forall y((M(a,y) \wedge T(y,a)) \supset y = x) \wedge \exists z((V(z,a) \wedge E(x,z) \wedge \forall u(E(u,z)) \supset u = x)]$$

Anmerkung:
Welche der beiden Lösungen besser ist, hängt vom Anwendungskontext ab. Die zweite Lösung hat jedenfalls den Nachteil, dass aus der Form nicht abgeleitet werden kann, dass die Mutter und der Vater einer Person eindeutig ist, obwohl diese Annahme aus den Formulierungen 'Anna ist *die* Mutter' bzw. '*der* Vater von Anna' folgt. Ebenso bleibt beispielsweise unberücksichtigt, dass jede weibliche Person eine Tochter ihrer Mutter ist. In der ersten Lösung sind diese und weitere Bedeutungszusammenhänge bereits in die Wahl der Signatur eingeflossen, was für viele Anwendungen adäquat ist. Andererseits bleibt die zweite Formalisierung etwas näher an der Struktur der natürlichsprachlichen Aussage, was wiederum für andere Anwendungen sinnvoll sein kann.

b) Signatur $\langle\{I,Ta,T,Kl,Gr,K,B\},\{\},\{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$I(x)$ ... x ist Informatikerin (einstellig)
$Ta(x)$ ... x ist Tierarzt (einstellig)
$T(x)$ ... x ist ein Tier (einstellig)
$Kl(x)$ ... x ist klein (einstellig)
$Gr(x)$ ... x ist groß (einstellig)
$K(x,y)$ ... x kennt y (zweistellig)
$B(x,y)$ ... x behandelt y (zweistellig)

PL-Formel:
$$\forall x(I(x) \supset \exists y[Ta(y) \wedge K(x,y) \wedge \exists z(Kl(z) \wedge T(z) \wedge B(y,z)) \wedge \forall u((Gr(u) \wedge T(u)) \supset \neg B(y,u))])$$

Anmerkungen:
(1) Es gibt hier zunächst kaum einen guten Grund, die weibliche Endung von 'Informatikerin' zum Anlass für eine explizite Einführung des zusätzlichen Prädikats 'weiblich' (oder 'männlich') zu machen. (Das würde man ja wohl auch kaum tun, wenn nur von Informatikern die Rede wäre.) Erst in einem weiteren Kontext, der neben Informatikerinnen auch Informatiker (etc.) erwähnt, wäre dies eventuell angebracht.
(2) Es ist möglich, die Existenzquantor-Vorkommen ($\exists y$, $\exists z$) gleich unmittelbar nach dem ersten Allquantor ($\forall x$) zu platzieren. Auch den zweiten Allquantor ($\forall u$) könnte man weiter nach vorne schieben. Allerdings ist es im Allgemeinen nicht sinnvoll, alle Quantoren an den Beginn der Formel zu stellen. Die Formalisierung ist transparenter und bleibt näher an der Struktur des zu formalisierenden Satzes, wenn man die Bindungsbereiche der Quantoren nicht unnötig vergrößert.

c) Signatur $\langle\{M, P, V\}, \{\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$M(x)$ ... x ist eine Manager (einstellig)
$P(x)$ ... x ist eine Person (einstellig)
$V(x, y)$ ... x vertraut y (zweistellig)

PL-Formel: $\exists x[M(x) \wedge V(x, x) \wedge \forall y((P(y) \wedge y \neq x) \supset \neg V(x, y))]$
alternativ, z.B.: $\exists x[M(x) \wedge V(x, x) \wedge \forall y(P(y) \supset (\neg V(x, y) \vee x = y))]$

Anmerkungen:
Man könnte in der Formel auch explizit ausdrücken, dass jeder Manager eine Person ist:
$\exists x[M(x) \wedge P(x) \wedge V(x, x) \wedge \forall y((P(y) \wedge y \neq x) \supset \neg V(x, y))]$.
Wenn man explizit festlegt, dass die Domäne der Interpretation ausschließlich aus Personen besteht, dann ist auch (z.B.) die Formel $\exists x[M(x) \wedge V(x, x) \wedge \forall y(y \neq x \supset \neg V(x, y))]$ adäquat.
Der Lösungsversuch $\exists x[M(x) \wedge \forall y((P(y) \wedge V(x, y)) \supset x = y]$ ist nicht korrekt, weil aus dieser Formel nicht folgt, dass x sich selbst vertraut ($V(x, x)$).

d) Signatur $\langle\{Ni, Ne\}, \{a\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$Ni(x, y)$ ... x ist eine Nichte von y (zweistellig)
$Ne(x, y)$ ... x ist ein Neffe von y (zweistellig)
Konstantensymbol:
a ... Abas

PL-Formel:
$$\exists x[Ni(x, a) \wedge \forall y(Ni(y, a) \supset y = x)] \wedge \exists x \exists y \exists z \exists u[x \neq y \wedge x \neq z \wedge x \neq u \wedge y \neq z \wedge y \neq u \wedge z \neq u \wedge Ne(x, a) \wedge Ne(y, a) \wedge Ne(z, a) \wedge Ne(u, a)]$$

Anmerkung:
(1) Es gibt hier keinen Anlass 'Nichte' und 'Neffe' indirekt, über weitere Prädikate wie 'Geschwister', 'männlich', 'weiblich' und Funktionen wie 'Vater' oder 'Mutter' auszudrücken. Aber wie schon für a) weiter oben vermerkt, sind Anwendungen denkbar, für die eine solche Formalisierung sinnvoll ist.
(2) Die gebunden Variablen x und y können hier problemlos für je zwei verschiedene Bindungsbereiche verwendet werden.

e) Signatur $\langle\{T, Fi, M, Fr, Kr, Tr, A\}, \{\}, \{\}\rangle$ mit folgender intendierter Bedeutung:
Prädikatensymbole:
$T(x)$ ... x ist eine Technikerin (einstellig)
$Fi(x)$ ... x ist eine Firma (einstellig)
$M(x)$ ... x ist ein Mensch (einstellig)
$Fr(x)$ ... x ist freundlich (einstellig)
$Kr(x)$ ... x ist kreativ (einstellig)
$Tr(x, y)$ ... x träumt von y (zweistellig)
$A(x, y)$ ... x arbeitet in y (zweistellig)

PL-Formel:
$\forall x(T(x) \supset \exists y[Fi(y) \wedge Tr(x, y) \wedge \forall z((M(z) \wedge A(z, y)) \supset (Kr(z) \wedge Fr(z)))])$