162) Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von $\sinh(x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Potenzreihenentwicklung nach Taylorreihe:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Zuerst die Ableitungen von sinh(x) :

$$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f''(x) = \frac{e^x + (-1)e^{-x}}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x)$$

$$f'''(x) = f'(x)$$

...

Einsetzen unserer Anschlussstelle $x_0 = 0$

$$f(x) = f''(x) = \frac{e^0 - e^{-0}}{2} = \frac{1-1}{2} = 0$$

$$f'(x) = f'''(x) = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} = \frac{1+1}{2} = 1$$

Für gerade n fällt unser Reihenglied weg, da mit 0 multipliziert wird

Für ungerade n gilt: $f^{(n)}(x_0) = 1$

Daraus ergibt sich:

$$\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - 0)^n = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x)^n$$

Gerade n ergeben 0, daraus folgt die Partialsummenfolge:

$$0 + x + 0 + \frac{x^3}{3!} + 0 + \frac{x^5}{5!} + 0 + \frac{x^7}{7!} + \cdots$$