Was ist Logik?

- Geschichte der Logik ist eng verknüpft mit (Sprach-) Philosophie

- Logik untersucht, wie aus wahren Aussagen andere wahre Aussagen folgen

- Beschränkung auf "Aussage A folgt nach einer gegebenen logischen Schlussregel notwendigerweise aus den Aussagen B, C, ..."

- Beispiele

  Wenn es regnet, dann wird die Strasse nass.

  Es regnet.

  Die Strasse wird nass.

  Vögel können fliegen.

  Tweetie ist ein Vogel.

  Tweetie kann fliegen.

- verallgemeinert zur universellen Schlussregel "modus ponens"

  Wenn A wahr ist, dann ist B wahr.

  A ist wahr.

  B ist wahr.

Was ist Logik?

- Logik stellt Sprachen zur Darstellung von Wissen zur Verfügung
- Logik erlaubt, nach festen Regeln aus Wissen anderes Wissen abzuleiten

- Logik als Grundlage für andere Gebiete: Mathematik, Informatik, künstliche Intelligenz

- Logik zur Darstellung der Semantik natürlicher und künstlicher Sprachen

- Logik als Modell für menschliches Denken?

Aussagenlogik

- atomare Aussagen sind einfache deklarative Sätze

  Die Sonne scheint.

  Es regnet.

  die wahr oder falsch sind

- in natürlichen Sprachen gibt es auch Satzarten, denen kein Wahrheitwert zugeschrieben werden kann, z.B.

  Scheint die Sonne ?

  Öffnen Sie bitte das Fenster.

- zusammengesetzte Aussagen

  Die Sonne scheint oder es regnet.

- formal mit logischen Konnektoren

  Die Sonne scheint. $\vee$ *Es regnet.*

- Wahrheitwert zusammengesetzter Aussagen wird aus den Wahrheitwerten der beteiligten Teilaussagen bestimmt, z.B. ist

  Die Sonne scheint. $\vee$ *Es regnet.*

  wahr, wenn mindestens eine der beiden Teilaussagen wahr ist.

Logische Konnektoren

- mit Hilfe von Konnektoren können aus Aussagen zusammengesetzte Aussagen konstruiert werden
- Wahrheitwert zusammengesetzter Aussagen wird eindeutig durch die Wahrheitwerte der beteiligten Teilaussagen bestimmt
- in der Aussagenlogik gibt es unter anderen die folgenden Konnektoren

Negation ("nicht")	$\neg$
Konjunktion ("und")	$\wedge$
Disjunktion ("oder")	$\vee$
Implikation ("wenn ... dann ...")	$\rightarrow$

- die logische Bedeutung dieser Konnektoren wird durch Wahrheitstabellen definiert
- die logische Bedeutung entspricht nicht in jedem Fall der Bedeutung des entsprechenden natürlichsprachlichen Ausdrucks
- in den Wahrheitstabellen werden Aussagen durch Grossbuchstaben (aussagenlogische Variable) dargestellt; es handelt sich um Platzhalter, die für irgendeine einfache oder zusammengesetzte Aussage stehen
- Wahrheitswerte: wahr (W), falsch (F)

Wahrheitstabellen: Negation

- Negation

P	$(\neg P)$
W	F
F	W

Der Konnektor Negation wirkt auf eine einzelne Aussage und kehrt deren Wahrheitswert um.

Wahrheitstabellen: Konjunktion

- Konjunktion

P	Q	$(P \wedge Q)$
W	W	W
W	F	F
F	W	F
F	F	F

Die logische Konjunktion ist wahr, wenn beide Teilaussagen wahr sind.

Während für die logische Konjunktion das kommutative Gesetz

$(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$

gilt, hat das natürlichsprachliche "und" oft eine zusätzliche zeitliche Bedeutung.

Die Sätze

Ich werde schläfrig und gehe ins Bett.

und

Ich gehe ins Bett und werde schläfrig.

drücken zwei verschiedene Sachverhalte aus.

Wahrheitstabellen: Disjunktion

- Disjunktion

P	Q	$(P \vee Q)$
W	W	W
W	F	W
F	W	W
F	F	F

Die logische Disjunktion ist inklusiv, d.h. sie ist wahr, wenn eine der beiden Aussagen wahr ist oder beide Aussagen wahr sind.

In der natürlichen Sprache hat "oder" oft auch die exklusive Bedeutung; so wird

Er kommt heute oder morgen.

als

Er kommt entweder heute oder morgen.

d.h. als

Er kommt (heute und nicht morgen) oder (morgen und nicht heute).

verstanden. Die letzte Formulierung zeigt, wie das exklusive "oder" in Logik ausgedrückt werden kann.

Wahrheitstabellen: Implikation

- Implikation

P	Q	$(P \rightarrow Q)$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Die logische Implikation ist nur dann falsch, wenn die Voraussetzung P wahr und die Konsequenz Q falsch ist. In allen anderen Fällen, insbesondere wenn die Voraussetzung P falsch ist, ist die Implikation wahr.

Der Fall $F \rightarrow Q$ wird als "ex falso quodlibet" bezeichnet.

Diese "materiell" genannte Implikation hat eine vollkommen logische Bedeutung, die allein durch die Wahrheitstabelle gegeben ist. Die Implikation hat keinerlei kausale Bedeutung, d.h. die Aussage

Wenn der Mond aus grünem Käse ist, dann ist vier eine Primzahl.

ist logisch wahr, obwohl beide Aussagen falsch sind und zwischen ihnen kein kausaler Zusammenhang besteht.

Implikation

- $(P \rightarrow Q)$ sei wahr

  wenn P wahr ist, dann muss auch Q wahr sein

  wenn P falsch ist, dann kann Q wahr oder falsch sein

- P wird deshalb als stärker, Q als schwächer bezeichnet
- W ist die schwächste Aussage, F die stärkste

  $(F \rightarrow W)$

- falls $(P \rightarrow Q)$, wird P hinreichend für Q genannt, Q notwendig für P
- falls $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$, wird P hinreichend und notwendig für Q genannt – und umgekehrt

Formale Syntax der Aussagenlogik

- Sprache der Aussagenlogik besteht aus (wohlgeformten) Aussagen; wohlgeformt bedeutet, dass Aussagen nach festen Regeln gebildet werden

- atomare Aussagen – dargestellt durch Buchstaben p, q, ... – sind wohlgeformt

- $\perp$ (Widerspruch) ist eine wohlgeformte atomare Aussage; ihr Wahrheitswert ist F

- wenn P und Q wohlgeformt sind, dann sind auch

  $(\neg P)$

  $(P \wedge Q)$

  $(P \vee Q)$

  $(P \rightarrow Q)$

  wohlgeformt.

  (P und Q sind logische Variablen, d.h. Platzhalter für irgendwelche atomaren oder zusamengesetzten Aussagen)

- es gibt keine weiteren wohlgeformten Aussagen

Vorrangsregeln

- zusammengesetzte Ausdrücke mit mehreren Konnektoren, z.B.
- $A \land \neg B \lor C \rightarrow D$

  sind möglicherweise unklar
- Klärung schaffen Vorrangsregeln oder Klammern
- Vorrangsregeln

  Negation

  vor

  Konjunktion

  vor

  Disjunktion

  vor

  Implikation
- Vorrang kann durch Klammerung angedeutet werden

  $A \land \neg B \lor C \rightarrow D \equiv (((A \land (\neg B)) \lor C) \rightarrow D)$
- im Zweifelsfall sollte man Klammern setzen; deswegen tauchen diese Klammern in der Definition der Sprache auf

Formale Syntax der Aussagenlogik

- Syntaxregeln der Aussagenlogik erzwingen, dass für einen wohlgeformten Ausdruck, z.B.

  $$((p \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow ((p \wedge (\neg\, q)) \rightarrow ((\neg\, q) \vee (\neg\, r))))$$

  alle Klammern gepaart sein müssen – für jede linke Klammer muss es eine entsprechende rechte geben

  und

  jeder geklammerte Ausdruck vollständig in dem umgebenden Ausdruck enthalten sein muss

- wie wir später sehen werden, wird die Grammatik einer solchen Sprache kontextfrei genannt

- in der Praxis werden wir oft Klammern weglassen, wenn keine Unklarheiten bestehen

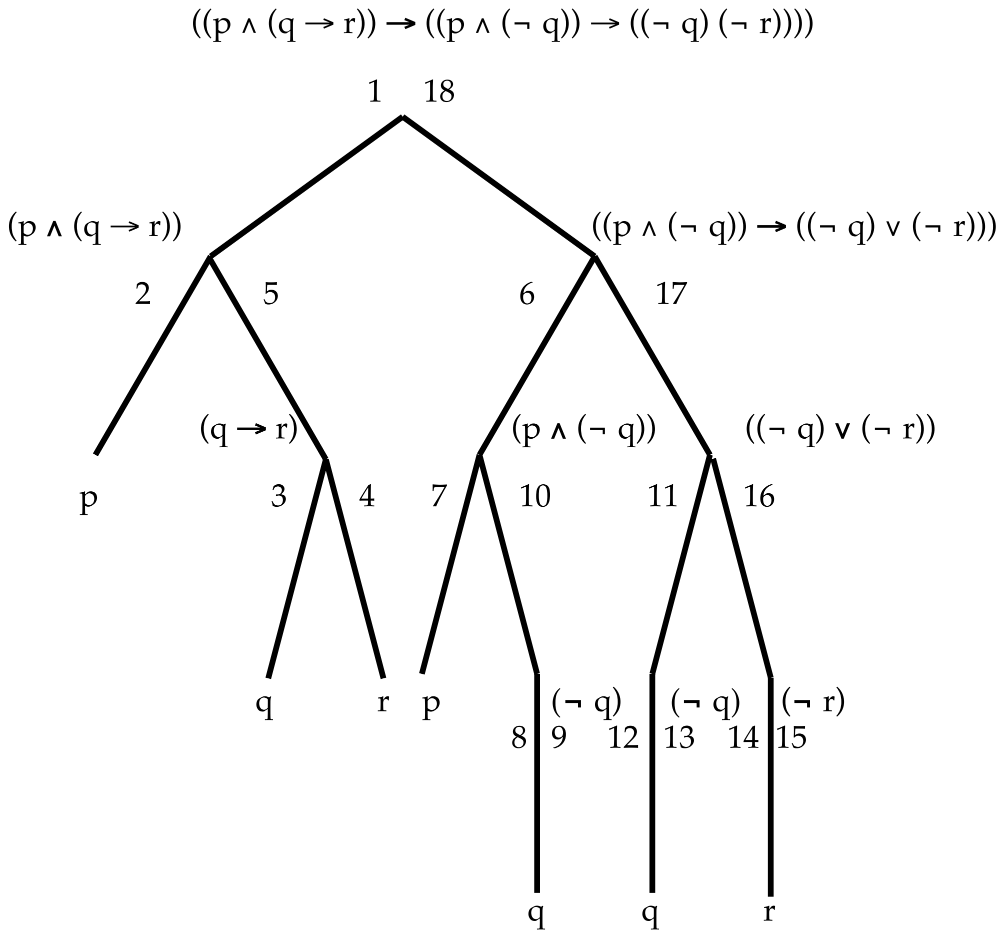
Formale Syntax der Aussagenlogik

- geschachtelte Klammerung führt zu einer Baumstruktur von Ausdrücken, z.B.

  $$(_1\,(_2\, p \wedge (_3\, q \rightarrow r)_4\,)_5 \rightarrow$$

  $$(_6\,(_7\, p \wedge (_8 \neg\, q)_9\,)_{10} \rightarrow (_{11}\,(_{12} \neg\, q)_{13} \vee (_{14} \neg\, r)_{15}\,)_{16}\,)_{17}\,)_{18}$$

  Gesamtausdruck ist Wurzel des Baumes, Teilausdrücke sind Knoten, atomare Ausdrücke sind Blätter



- Knoten sind auch mit den entsprechenden Klammerpaaren bezeichnet; die jeweiligen Hauptkonnektoren sind hervorgehoben

Semantik der Aussagenlogik

- atomaren Ausdrücken werden durch eine Funktion v Wahrheitswerte {W, F} zugewiesen, z.B.

  v(p) = W

  v(q) = F

  (Man spricht auch von einer Interpretation oder einer Belegung mit Wahrheitswerten.)

- nachdem den atomaren Ausdrücken Wahrheitswerte zugewiesen wurden, kann man mit Hilfe der Wahrheitstabellen den Wahrheitswert jedes Ausdrucks bestimmen

- Beispiel: $(p \wedge (q \rightarrow r))$

p	$\wedge$	q	$\rightarrow$	r
W	W	W	W	W
W	F	W	F	F
W	W	F	W	W
W	W	F	W	F
F	F	W	W	W
F	F	W	F	F
F	F	F	W	W
F	F	F	W	F

Semantik

- im Prinzip kann man jedem aussagenlogischen Ausdruck einen Wahrheitswert zuweisen
- in der Praxis jedoch nicht, da Wahrheitstabellen exponentiell wachsen: für Ausdrücke, die n atomare Ausdrücke enthalten, entstehen Wahrheitstabellen mit 2^n Zeilen

Semantik: Erfüllbarkeit, Widerlegbarkeit

- Aussagen sind erfüllbar, wenn sie durch eine Belegung mit Wahrheitwerten wahr gemacht werden können

  Beispiel

  $(P \vee Q)$

  ist erfüllbar, z.B. durch $v(P) = W$ und $v(Q) = F$

- Aussagen sind widerlegbar, wenn sie durch eine Belegung mit Wahrheitwerten falsch gemacht werden können

  Beispiel

  $(P \vee Q)$

  ist durch $v(P) = F$ und $v(Q) = F$ widerlegbar

Semantik: Tautologie, Kontradiktion

- Tautologien sind Aussagen, die immer wahr sind, z. B.

  $(P \vee \neg P)$

P	∨	¬	P
W	W	F	W
F	W	W	F

  (Man spricht auch von gültigen Aussagen.)

- Wenn eine Aussage P eine Tautologie ist, schreibt man

  $\models P$

- Aussagen, die immer falsch sind, heissen Kontradiktionen, z.B.

  $(P \wedge \neg P)$

P	∧	¬	P
W	F	F	W
F	F	W	F

  Die atomare Aussage $\perp$ ist eine Kontradiktion.

- Eine Aussage ist genau dann eine Kontradiktion, wenn ihre Negation eine Tautologie ist. Wieso?

Semantik: logische Konsequenz

- eine Aussage P ist die logische Konsequenz einer Menge von Aussagen M, wenn **jede** Zuordnung von Wahrheitswerten, die M wahr macht, auch P wahr macht

  $M \models P$

- wenn P keine logische Konsequenz von M ist, schreibt man

  $M \not\models P$

- Beispiel 1:

  $M=\{p \rightarrow q, q \rightarrow \neg r, r \rightarrow (p \vee s)\}$

  $P = q \rightarrow s$

  Es gilt $M \not\models P$, da wir ein Gegenbeispiel finden können, d.h. eine Zuordnung von Wahrheitswerten, die M wahr und P falsch macht.

  aus $v(q \rightarrow s) = F$ folgt $v(q) = W$, $v(s) = F$

  aus $v(q \rightarrow \neg r) = W$ und $v(q) = W$ folgt $v(r) = F$

  aus $v(q) = W$ folgt $v(p \rightarrow q) = W$

  aus $v(r) = F$ folgt $v(r \rightarrow (p \vee s)) = W$

  mit $v(p)$ beliebig, $v(q) = W$, $v(r) = v(s) = F$ erhalten wir $v(M) = W$ und $v(P) = F$

  P ist keine logische Konsequenz von M

Semantik: logische Konsequenz

- Beispiel 2:

  $M=\{p \rightarrow q, q \rightarrow \neg r, r \rightarrow (p \vee s)\}$

  $P = \neg p \vee (q \wedge \neg r)$

  Es gilt $M \models P$ wie ein Beweis durch Widerspruch zeigt.

  Annahme: Wenn wir eine Zuordnung finden, die M wahr und P falsch macht, dann kann P nicht die logische Konsequenz von M sein.

  $v(p \rightarrow q) = v(q \rightarrow \neg r) = v(r \rightarrow (p \vee s)) = W$

  $v(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) = F$

  aus $v(\neg p \vee (q \wedge \neg r)) = F$ folgen notwendigerweise $v(p) = W$ und $v(q \wedge \neg r) = F$

  aus $v(p \rightarrow q) = W$ und $v(p) = W$ folgt $v(q) = W$

  aus $v(q \rightarrow \neg r) = W$ und $v(q) = W$ folgt $v(r) = F$

  daraus folgt schliesslich $v(q \wedge \neg r) = W$ und somit ein Widerspruch zur obigen Annahme

  Damit folgt: P ist logische Konsequenz von M

Logische Äquivalenz: Umformungen

- zwei Aussagen P und Q sind logisch äquivalent

  $P \equiv Q$

  wenn sie die gleiche Wahrheitstabelle haben

- $\equiv$ ist kein Element der Sprache der Aussagenlogik, sondern ein metasprachliches Zeichen

- zwei Aussagen sind logisch äquivalent, wenn jede die logische Konsequenz der anderen ist

- Idempotenz

  $(P \vee P) \equiv P$ sowie $(P \wedge P) \equiv P$

- Kommutativität

  $(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$

  $(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$

- Assoziativität

  $(P \vee (Q \vee R)) \equiv ((P \vee Q) \vee R) \equiv (P \vee Q \vee R)$

  $(P \wedge (Q \wedge R)) \equiv ((P \wedge Q) \wedge R) \equiv (P \wedge Q \wedge R)$

- Distributivität

  $(P \vee (Q \wedge R)) \equiv ((P \vee Q) \wedge (P \vee R))$

  $(P \wedge (Q \vee R)) \equiv ((P \wedge Q) \vee (P \wedge R))$

Logische Äquivalenz: Umformungen

- doppelte Negation

  $(\neg\ (\neg\ (P)) \equiv P$

- de Morgan Regeln

  $(\neg\ (P \vee Q)) \equiv (\neg\ P) \wedge (\neg\ Q)$

  $(\neg\ (P \wedge Q)) \equiv (\neg\ P) \vee (\neg\ Q)$

- Implikation kann durch Negation und Disjunktion ausgedrückt werden

  $(P \rightarrow Q) \equiv (\neg\ P) \vee Q$

- Die beiden letzten Umformungen zeigen, dass die Konnektoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ nicht unabhängig sind.

Adäquate Mengen von Konnektoren

- Wieviele verschiedene Konnektoren gibt es überhaupt?

  Konnektoren werden durch Wahrheitstabellen definiert

  Wahrheitstabelle für n Aussagen hat 2^n Einträge

  jeder Eintrag kann wahr oder falsch sein

  also gibt es für n Aussagen 2^{2^n} verschiedene Wahrheitstabellen, d.h. 2^{2^n} verschiedene Konnektoren

  für zwei Aussagen gibt es also 2^{2^2} =16 verschiedene Konnektoren

- Sind diese 16 Konnektoren unabhängig? Wieviele braucht man mindestens?

- man kann sich leicht überzeugen, dass man mindestens die Negation braucht und einen Konnektor, der zwei Aussagen miteinander verknüpft

- *adäquate* Mengen von Konnektoren sind z.B.

  $\{ \neg, \vee\}$ sowie $\{ \neg, \wedge\}$

- andere Konnektoren erhält man mit Hilfe der eingeführten Identitäten, z.B.

  $\wedge$ aus $\{ \neg, \vee\}$

  $(P \wedge Q) \equiv (\neg\ ((\neg\ P) \vee (\neg\ Q)))$

Adäquate Mengen von Konnektoren

- adäquate Mengen von Konnektoren können aus einem einzigen der 16 Konnektoren bestehen z.B.

  {nand} (P nand Q) $\equiv$(¬ (P ∧ Q))

  mit der Wahrheitstabelle

P	Q	(P nand Q)
W	W	F
W	F	W
F	W	W
F	F	W

- und

  {nor} (P nor Q) $\equiv$ (¬ (P ∨ Q))

  mit der Wahrheitstabelle

P	Q	(P nor Q)
W	W	F
W	F	F
F	W	F
F	F	W

Adäquate Mengen von Konnektoren

- andere Konnektoren erhält man mit Hilfe von Identitäten, z.B.

  $(\neg P) \equiv (P \text{ nand } P) \equiv (P \text{ nor } P)$

  $(P \wedge Q) \equiv (P \text{ nand } Q) \text{ nand } (P \text{ nand } Q)$

  $(P \vee Q) \equiv (P \text{ nand } P) \text{ nand } (Q \text{ nand } Q)$

- adäquate Mengen von Konnektoren sind für die Entwicklung logischer Schaltkreise von grosser Bedeutung: wie viele verschiedene Komponenten braucht man mindestens, um alle logischen Konnektoren darzustellen?

Normalformen

- unterschiedliche Formen der gleichen Aussage, z.B.

  $P \equiv (\neg\ (\neg\ P))$

  $\neg\ ((P \vee Q)) \equiv (\neg\ P\ ) \wedge (\neg\ Q)$

  erschweren die Lesbarkeit und führen zum Wunsch nach Standardformen

- Konjunktion (Disjunktion) von Aussagen $P_1, P_2, \ldots , P_n$ ist die Aussage $P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_n$ (bzw. $P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_n$).

  (Wegen der Assoziativität sind Klammern unnötig.)

- Literale sind atomare Aussagen oder negierte atomare Aussagen

- konjunktive Normalform: Konjunktion von Disjunktionen von Literalen

  $D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_n$

  $D_i = L_{i1} \vee L_{i2} \vee \ldots \vee L_{im}$

  L_{ij} (negierte) atomare Aussage

- disjunktive Normalform: Disjunktion von Konjunktionen von Literalen

  $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_n$

  $K_i = L_{i1} \wedge L_{i2} \wedge \ldots \wedge L_{im}$

  L_{ij} (negierte) atomare Aussage

Umwandlung in Normalform

- systematische Umwandlung in konjunktive Normalform in drei Schritten

  Beispiel

  $(A \rightarrow \neg(B \rightarrow C))$ (1)

  1. Schritt: Elimination von $\rightarrow$

  $(A \rightarrow \neg (B \rightarrow C)) \equiv$ [Regel: $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$]

  $(\neg A \vee \neg (\neg B \vee C))$ (2)

  2. Schritt: Verteilung von $\neg$ auf atomare Ausdrücke

  $(\neg A \vee \neg (\neg B \vee C)) \equiv$ [Regel: $\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q)$]

  $(\neg A \vee (\neg \neg B \wedge \neg C)) \equiv$ [Regel: $\neg \neg P \equiv P$]

  $(\neg A \vee (B \wedge \neg C))$ (3)

  3. Schritt: Umwandlung in eine Konjunktion von Disjunktionen durch distributive Regel

  $(\neg A \vee (B \wedge \neg C)) \equiv$ [Regel: $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$]

  $((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C))$ (4)

- alternativ: Umwandlung in disjunktive Normalform - Disjunktion von Konjunktionen - durch distributive Regel

  $(\neg A \vee (B \wedge \neg C))$ [3 ist schon disjunktive Normalform]

Normalformen

- Theorem: zu jeder aussagenlogischen Formel gibt es (mindestens) eine logisch äquivalente disjunktive Normalform und (mindestens) eine logisch äquivalente konjunktive Normalform.

- nicht jede Umwandlung ergibt die kürzeste Normalform

  Beispiel

  Umwandlung der konjunktiven Normalform (4) in disjunktive Normalform durch Distribution ergibt

  $((\neg A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg C)) \equiv$ [Regel: $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$]

  $(\neg A \vee (\neg A \wedge \neg C) \vee (B \wedge \neg A) \vee (B \wedge \neg C))$

  während die logisch äquivalente disjunktive Normalform (3)

  $(\neg A \vee (B \wedge \neg C))$

  erheblich kürzer ist

- (kurze) Normalformen erleichtern nicht nur die Lesbarkeit, sondern sind auch für die Entwicklung logischer Schaltkreise wichtig: wieviele Komponenten braucht man höchstens, um eine logische Funktion zu erzeugen?

- konjunktive Normalformen spielen auch in der logischen Programmierung eine Rolle

Anwendung: Analyse natürlichsprachlicher Sätze

- (Aussagen-) Logik kann helfen, Fragen zu beantworten, die in natürlicher Sprache formuliert sind

- Probleme bei der logischen Analyse von Sätzen

  Identifizierung der Konnektoren, die die logische Struktur des Satzes bestimmen

  Identifizierung der Satzteile, die als atomare Aussagen dargestellt werden sollen

  korrekte Schachtelung der Teilaussagen

  Ambiguitäten

Anwendung: Analyse natürlichsprachlicher Sätze

- Beispiel

  Die Versammlung findet statt, wenn alle Teilnehmer rechtzeitig informiert wurden und die Versammlung beschlussfähig ist. Die Versammlung ist beschlussfähig, wenn mindestens 15 Teilnehmer anwesend sind. Die Teilnehmer sind rechtzeitig informiert worden, wenn es keinen Streik der Postbeamten gab. Wenn die Versammlung nicht stattfand, dann waren weniger als 15 Teilnehmer anwesend oder es gab einen Streik der Postbeamten.

  Wir führen atomare Aussagen ein

s	die Versammlung findet statt
t	alle Teilnehmer wurden rechtzeitig informiert
f	mindestens 15 Teilnehmer sind anwesend
b	die Versammlung ist beschlussfähig
p	es gab einen Streik der Postbeamten

  und übersetzen Satz für Satz.

  1. *Die Versammlung findet statt, wenn alle Teilnehmer rechtzeitig informiert wurden und die Versammlung beschlussfähig ist.*

  $P_1 \equiv (t \wedge b) \rightarrow s$

  2. *Die Versammlung ist beschlussfähig, wenn mindestens 15 Teilnehmer anwesend sind.*

  $P_2 \equiv f \rightarrow b$

Anwendung: Analyse natürlichsprachlicher Sätze

3. *Die Teilnehmer sind rechtzeitig informiert worden, wenn es keinen Streik der Postbeamten gab.*

$P_3 \equiv \neg\, p \rightarrow t$

4. *Wenn die Versammlung nicht stattfand, dann waren weniger als 15 Teilnehmer anwesend oder es gab einen Streik der Postbeamten.*

$P_4 \equiv \neg\, s \rightarrow (\neg\, f \vee p)$

Gilt $\{P_1, P_2, P_3\} \models P_4$?

Beweis durch Widerspruch: Annahme P_1, P_2, P_3 wahr und P_4 falsch

aus $v(P_4) = v(\neg\, s \rightarrow (\neg\, f \vee p)) = F$ folgt $v(s) = F$, $v(f) = W$, $v(p) = F$

aus $v(P_2) = v(f \rightarrow b) = W$ und $v(f) = W$ folgt $v(b) = W$

aus $v(P_3) = v(\neg\, p \rightarrow t) = W$ und $v(p) = F$ folgt $v(t) = W$

damit ist $v(P_1) = v((t \wedge b) \rightarrow s) = F$

Widerspruch zur Annahme $v(P_1) = W$

also gibt es keine derartige Zuordnung und der Schluss $\{P_1, P_2, P_3\} \models P_4$ ist gültig