# Mathematik 2 für Informatiker — Übungsbeispiele

1–2) Man berechne die Grenzwerte nachstehender unbestimmter Formen:

**1)**

(a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\ln(x)}$

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^4}{e^{4x}}$

**2)**

(a) $\lim\limits_{x\to 1/2} (1-2x)\tan(\pi x)$

(b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x^2)}{(x-1)(\cos(x-1)-1)}$

3–8) Man untersuche, wo die Funktion $f(x)$ differenzierbar ist und bestimme dort $f'(x)$:

**3)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2-5x+2}}$

**4)** $f(x) = \operatorname{Arcsin}\left(\sqrt[3]{x^2-2}\right)$

**5)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{\sqrt{x^2-6x+3}}$

**6)** $f(x) = \operatorname{Arccos}\left(\sqrt[4]{x^2-2}\right)$

**7)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-4x+3}}$

**8)** $f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$

9–10) Man zeige mittels Differenzieren:

**9)**

$$\operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \frac{1}{2}\operatorname{Arcsin}x = \frac{\pi}{4}, \qquad x \in (-1,1)$$

**10)**

$$\operatorname{Arcsin}x = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right), \qquad x \in (-1,1)$$

**11)** Zeigen Sie: Sind $g_1(x), \ldots, g_m(x)$ differenzierbar und $g_j(x) \neq 0$ für alle $j$, so gilt

$$\frac{\left(\prod_{j=1}^m g_j(x)\right)'}{\prod_{j=1}^m g_j(x)} = \sum_{j=1}^m \frac{g_j'(x)}{g_j(x)}\,.$$

**12)** Wie ist $t$ zu wählen, damit die Funktion $f(x) = (x^2+t)/(x-t)$ in einer Umgebung der Stelle $x_0 = 1$ streng monoton fallend ist? Machen Sie eine Skizze.

**13)** Man diskutiere die Funktion $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x$ im Intervall $I = [-\pi, \pi]$.

**14)** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend und differenzierbar. Man zeige, daß dann $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

**15)** Folgt in Bsp. 14) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

**16)** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend und differenzierbar. Man zeige, daß dann $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

**17)** Folgt in Bsp. 16) aus der strengen Monotonie sogar $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$? (Beweis oder Gegenbeispiel!)

**18)** Für die Funktion $f(t) = \begin{cases} -1 & (t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$ berechnen Sie $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Ist $F(x)$ stetig bzw. differenzierbar?

**19)** Wie 18) für $f(t) = \begin{cases} -2 & (t \leq 1) \\ 1 & (t > 1) \end{cases}$ .

**20)** Berechnen Sie $\int_2^3 x^2\,dx$ mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung. (Hinweis: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.)

**21)** Berechnen Sie $\int_1^2 x^3\,dx$ mit Hilfe von Untersummen bei äquidistanter Teilung. (Hinweis: $\sum_{k=1}^n k^3 = \binom{n+1}{2}^2$, $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $\sum_{k=1}^n k = \binom{n+1}{2}$.)

**22)** Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k(n-k)$$

durch Interpretation als Grenzwert einer Riemannschen Zwischensumme.

**23)** Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{n-2k}}{k}$$

durch Interpretation als Grenzwert einer Riemannschen Zwischensumme.

**24)** Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{(n+k)(n-k)}$$

durch Interpretation als Grenzwert einer Riemannschen Zwischensumme.

**25)** Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{k(n-k)}$$

durch Interpretation als Grenzwert einer Riemannschen Zwischensumme.

**26)** Mit Hilfe der Substitutionsregel beweise man die nachstehende Integrationsregel

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C$$

und berechne damit $\displaystyle\int \frac{dx}{x \ln x}$.

**27)** Man berechne $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$.
(Anleitung: Zum Integrieren wähle man die Substitution $u = \sqrt{x-1}$. Ferner beachte man, dass das angegebene Integral sowohl bei $x = 1$ als auch bei $x = \infty$ uneigentlich ist.)

28–55) Man berechne:

**28)** $\displaystyle\int_1^2 \left(\sqrt[4]{x\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}\right)}\right)^5 dx$

**29)** $\displaystyle\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \left(\sin^2 x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) dx$

**30)** $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) dx$

**31)** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^2 x\,dx$

**32)** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^2 x\,dx$

**33)** $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$

**34)** $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}\,dx$

**35)** $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\,dx$

**36)** $\int x \text{Arcsin} x \, dx$

**37)** $\int \frac{4x^3 + x^2 + 3x + 5}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} \, dx$

**38)** $\int \frac{x^6 - 6x + \sqrt{12x}}{x^2} \, dx$

**39)** $\int x^2 \cos x \, dx$

**40)** $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 9}$

**41)** $\int \frac{dx}{2 \sin^2 x \cos^2 x}$

**42)** $\int \frac{e^x}{e^{2x} - e^x - 6} \, dx$

**43)** $\int \text{arccos} x \, dx$

**44)** $\int x \text{Arctan}\,(x) \, dx$

**45)** $\int \frac{(x-3)^2}{x^{-7/2}} \, dx$

**46)** $\int x (\ln x)^2 \, dx$

**47)** $\int (\sin x)(1 + 2\cos x)^4 \, dx$

**48)** $\int \frac{\sqrt{x+1}}{x} \, dx$

**49)** $\int (x^2 + 1) e^{-2x} \, dx$

**50)** $\int \frac{x^2 + 1}{x^3 + x^2 - x - 1} \, dx$

**51)** $\int \frac{x^2 + 3}{2x^2 + 7} \, dx$

**52)** $\int \frac{e^x - 1}{e^{2x} + 1} \, dx$

**53)** $\int \sqrt{1 + 7x^2} \, dx$

**54)** $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$

**55)** $\int \frac{dx}{\sin x}$

56–59) Bestimmen Sie den Wert der folgenden Integrale näherungsweise auf 3 Dezimalstellen (ohne und mit Computer).
Hinweis: Entwickeln Sie den Integranden in eine Taylorreihe. Wieviele Terme sind nötig, um die gewünschte Genauigkeit zu erzielen?

**56)** $\int_0^1 \frac{e^{-x^2} - 1 + x^2}{x^4} \, dx$

**57)** $\int_0^1 \frac{\sin(u^2)}{u} \, du$

**58)** $\int_0^1 \frac{\cos(t^2) - 1}{t^2} \, dt$

**59)** $\int_0^{1/2} \ln \frac{1}{1 - x^3} \, dx$

60–65) Untersuchen Sie mit Hilfe des Integralkriteriums, ob die folgenden Reihen konvergieren:

**60)** $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\ln n}$

**61)** $\sum_{n \geq 1} e^{-\sqrt{n}}$

**62)** $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln^\alpha n} \qquad (\alpha > 0)$

**63)** $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln^\alpha n}{n^{1+\beta}} \qquad (\alpha, \beta > 0)$

**64)** $\sum_{n \geq 0} e^{-n^2}$

**65)** $\sum_{n \geq 0} n e^{-n^2}$

66–68) Man stelle den Definitionsbereich und den Wertebereich folgender Funktionen fest und beschreibe die Höhenlinien:

**66)**

$$(a) \quad z = x^2 - y^2, \qquad (b) \quad z = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}}.$$

**67)**

$$(a)\quad z = xy, \qquad\qquad (b)\quad z = \frac{x}{y}.$$

**68)**

$$(a)\quad z = x^2y, \qquad\qquad (b)\quad z = \frac{x}{y^2}.$$

**69)** Gegeben sei die Polynomfunktion $f(x,y) = xy^2 - 10x$. Man bestimme die Gleichungen ihrer Schnittkurven mit den senkrechten Ebenen $x = x_0$ bzw. $y = y_0$ sowie die Höhenlinien für $z = z_0$ und skizziere alle drei Kurvenscharen. Mittels eines Computeralgebrasystems ermittle man eine 3D-Darstellung der gegebenen Funktion.

**70)** Wie Bsp 69 mit der Funktion $f(x,y) = x^2y + 2x - y$.

**71)** Gegeben sei die quadratische Form $q(\mathbf{x}) = q(x,y) = 4x^2 + 2bxy + 25y^2$ mit $b \in \mathbb{R}$. Wie lautet die zugehörige symmetrische Matrix $A$, sodaß $q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A\mathbf{x}$. Für welche Werte von $b$ ist die Form positiv definit?

**72)** Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodaß die quadratische Form $3x^2 + axy + 2xz + 2y^2 + 2yz + 2z^2$ positiv definit ist.

**73)** Wie 72 für $x^2 + axy + 3xz + y^2 - 2yz + 4z^2$.

**74)** Bestimmen Sie einen Wert $a \in \mathbb{Z}$, sodaß die quadratische Form $-x^2 + axy - 3xz + y^2 - 2yz + 4z^2$ negativ definit ist.

75–80) Bestimmen Sie das Definitheitsverhalten der folgenden Matrizen.

**75)** $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 14 \end{pmatrix}$

**76)** $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -5 \\ -2 & -2 & -3 \\ 6 & 1 & -10 \end{pmatrix}$

**77)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$

**78)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

**79)** $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -2 \\ -1 & 6 & 10 \end{pmatrix}$

**80)** $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

**81)** Eine Funktion $f(x_1, \ldots, x_n)$ heißt **homogen** vom Grad $r$, falls für jedes feste $\lambda > 0$ und alle $(x_1, \ldots, x_n)$ aus dem Definitionsbereich von $f$ gilt:

$$f(\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^r f(x_1, \ldots, x_n).$$

Man beweise, daß die beiden Produktionsfunktionen $f(x,y) = cx^\alpha y^{1-\alpha}$ und $g(x,y) = (cx^\alpha + dy^\alpha)^{1/\alpha}$ ($x$ Arbeit, $y$ Kapital, $c$, $d$, $\alpha$ konstant) homogene Funktionen vom Homogenitätsgrad $r = 1$ sind.

**82)** Man prüfe nach, ob die Funktionen

$(a)\quad f(x,y,z) = x + (yz)^{1/2}$ (für $y, z \geq 0$) $\qquad (b)\quad f(x,y) = x^2 + y$

$(c)\quad f(x,y) = ax^by^c$ (mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, $x, y > 0$)

homogen sind.

83–84) Man untersuche für beliebige $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ den Grenzwert $\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t)$. Ist die Funktion $f(x,y)$ an $(0,0)$ stetig?

**83)**

$$f(x,y) = \frac{|y|}{|x|^3 + |y|} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 1$$

**84)**

$$f(x,y) = \frac{2y^2}{|x| + y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0$$

**85)** Sei

$$f(x,y) = \frac{x \cos \frac{1}{x} + y \sin y}{2x - y}$$

für $0 \neq x \neq 2y$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$?

**86)** Sei

$$f(x,y) = \frac{x + y \cos \frac{1}{y}}{x + y}$$

für $0 \neq y \neq -x$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 0} \lim_{y \to 0} f(x,y).$$

Existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$?

**87)** Sei

$$f(x,y) = x^{1/y}$$

für $0 \neq y$ und $x \geq 0$. Man untersuche und vergleiche die iterierten Grenzwerte

$$\lim_{y \to 0} \lim_{x \to 1} f(x,y) \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 1} \lim_{y \to 0} f(x,y).$$

Untersuchen Sie, ob $f(x,y)$ an der Stelle (1,0) stetig ist.

88–89) Man untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ auf Stetigkeit (Hinweis: $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ für $a, b \geq 0$.):

**88)**

$$f(x,y) = \frac{xy}{|x| + |y|} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0.$$

**89)**

$$f(x,y) = \frac{xy^2 + x^2y}{x^2 + y^2} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } \quad f(0,0) = 0.$$

**90)** In welchen Punkten $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

stetig?

**91)** Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y,z) = \cos(xy) + \frac{\sin z}{1+x^2+y^2}$. In welchen Punkten des Definitionsbereiches ist $f$ stetig?

**92)** Zeigen Sie: Die Komposition stetiger Funktionen $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $g : M \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(I) \subseteq M$ is wiederum stetig.

**93)** Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0, 0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**94)** Man untersuche die Stetigkeit der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ im Punkt $(0, 0)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**95)**

*(a)* Für die Funktion $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ berechne man die partiellen Ableitungen $f_x$, $f_y$ und die Gleichung der Tangentialebene an der Stelle $(x_0, y_0) = (0.2, 0.3)$.
*(b)* Man berechne alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung für die Funktion $f(x, y) = x^2 \sin y + \cos(x + 2y)$.

**96)** Man prüfe nach, ob die gemischten partiellen Ableitungen $f_{xy}$ und $f_{yx}$ für die folgenden Funktionen $f(x, y)$ übereinstimmen:

$$(a) \quad f(x,y) = \frac{x^2}{1+y^2}, \qquad (b) \quad f(x,y) = x^3 e^{y^2}, \qquad (c) \quad f(x,y) = \sqrt{xy^3}.$$

97–98) Man bestimme den Definitionsbereich der Vektorfuntion $\mathbf{x}(t)$, sowie die Ableitung $\mathbf{x}'(t)$, wo sie existiert:

**97)**

$$\mathbf{x}(t) = \left( \left( \frac{2t}{\sqrt{1-3t^2}} \right)^{\frac{5}{4}}, \sin\left( \frac{1}{1+t^2} \right) \right)$$

**98)**

$$\mathbf{x}(t) = \left( \sin(1+\cos(t)), \frac{t^{\frac{5}{4}}}{\sqrt{1-t^2}} \right)$$

99–102) Man bestimme die partiellen Ableitungen:

**99)** $f(x, y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{4x^2y^2}{1+x+y}\right)$

**100)** $f(x, y, z) = \dfrac{y + \sqrt{xz}}{1 + \sin^2(xyz)}$

**101)** $f(x, y) = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{2x^3y}{y-x^3}\right)$

**102)** $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{x} + y^3z^2}{1 + \cos^2(1+x)}$

103–106) Man bestimme die Funktionalmatrix zu $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$:

**103)** $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(x+y-z) \\ \cos\left(\frac{xy}{z}\right) \end{pmatrix}$

**104)** $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{y^2z} \\ x^y z^2 \end{pmatrix}$

**105)** $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{x-z}{y+1}} \\ z \cdot e^{-\frac{x}{y}} \end{pmatrix}$

**106)** $\mathbf{f}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\operatorname{Arctan}(x+y^2)) \\ x\cos(y^2 - \sqrt{x}) \cdot \tan(xyz) \end{pmatrix}$

**107)** Duch $z = \frac{xy}{x+y}$ ist eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Beschränkung von $x$ und $y$ auf die Werte $x = e^t$ und $y = e^{-t}$ $(t \in \mathbb{R})$ liefert eine Kurve auf dieser Fläche. Man bestimme $\frac{dz}{dt}$ mittels Kettenregel und mache die Probe, indem man zuerst $x$ und $y$ in $z$ einsetzt und anschließend nach dem Parameter $t$ differenziert. Wo verläuft diese Kurve auf der Fläche horizontal?

**108)** Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = \ln(u\sin(u) - v)$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = \tan(-u+v^3)$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt} g(2t, t^2+1)$.

**109)** Es sei $g_u(u,v) = \frac{\partial}{\partial u} g(u,v) = e^{-u^2}$ und $g_v(u,v) = \frac{\partial}{\partial v} g(u,v) = -e^{v^3}$. Man bestimme $h(t) = \frac{d}{dt} g(t^2-1, 3t)$.

**110)** Mit Hilfe der Kettenregel berechne man den Wert der partiellen Ableitung der Funktion $F(x,y) = f(g(x,y), h(x,y))$ nach $y$ an der Stelle $(0,0)$, wobei $f(x,y) = x^2+y^2$, $g(x,y) = \cos x + \sin y$ und $h(x,y) = x+y+1$ ist.

**111)** Man bestimme $\frac{dy}{dx}$ für folgende implizit gegebene Kurven:

$(a)$ $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, für $x_0 = 0.5$, $(b)$ $x^3 + y^3 - 2xy = 0$, für $x_0 = 1$.

**112)** Man berechne das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung der Funktion $f(x,y) = e^{x-y}(x+1) + x\sin(x^2-y)$ an der Stelle $(x_0,y_0) = (0, \frac{\pi}{2})$.

**113)** Man berechne das Taylorsche Näherungspolynom zweiter Ordnung der Funktion $f(x,y,z) = e^{x^2yz}(x+yz+1) + x\cos(x^2-y-z)$ an der Stelle $(x_0,y_0,z_0) = (0,0,\frac{\pi}{2})$.

**114)** Man bestimme die lineare und die quadratische Approximation der Funktion

$$f(x,y) = x^2(y-1) + xe^{y^2}$$

im Entwicklungspunkt $(1,0)$.

**115)** Man bestimme die Ableitung der Funktion $f(x,y)$ in Richtung $\frac{\binom{-1}{1}}{\|\binom{-1}{1}\|}$ im Punkt $(3,2)$ mit

$(a)$ $f(x,y) = \dfrac{x^2}{1+y^2}$, $(b)$ $f(x,y) = x^3 e^{y^2}$, $(c)$ $f(x,y) = \sqrt{xy^3}$.

**116)** Man berechne die Ableitung von $f(x,y) = x^2 + 4y^2$ im Punkt $P_0(3,2)$

*(a)* in Richtung der Koordinatenachsen,
*(b)* in Richtung von $(-1,-1)$, sowie
*(c)* in Richtung von $\mathrm{grad} f$.

**117)** In welcher Richtung erfolgt die maximale Änderung von

$$f(x,y,z) = x^2\sin(yz) - y^2\cos(yz)$$

vom Punkt $P_0(4, \frac{\pi}{4}, 2)$ aus und wie groß ist sie annähernd?

**118)** Es sei $F(x,y) = \frac{2x^4+y}{y^5-2x}$, $x = 2u-3v+1$, $y = u+2v-2$. Man berechne $\frac{\partial F}{\partial u}$ und $\frac{\partial F}{\partial v}$ für $u=2$, $v=1$.

**119)** Es sei $F(x,y) = e^x\sin y + e^y \sin x - 1 = 0$. Man berechne $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2y}{dx^2}$.

**120)** Es sei $F(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 - 1 = 0$. Man berechne $y'$ und $y''$.

**121)** Man berechne $y'$ und $y''$ im Punkt $(1,1)$ der Kurve $x^3 + 3x^2y - 6xy^2 + 2y^3 = 0$.

**122)** Es sei $F(x,y,z) = x^2(2x+3z) + y^2(3x-4z) + z^2(x-2y) - xyz = 0$. Man berechne $z_x$ und $z_y$.

**123)** In welchen Punkten der Kurve $x^2 + 4xy + 16y^2 = 27$ sind die Tangenten horizontal, in welchen vertikal?

**124)** Bestimmen Sie alle Tangenten mit Anstieg $\pm 1$ an die Kurve $2x^2 - 4xy + 9y^2 = 36$.

**125)** Man ermittle die Gleichungen einer Tangente aus dem Punkt $(0,0)$ an die durch $y^3 = x^3 - 2x + 2$ bestimmte Kurve.

126–133) Man bestimme alle relativen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f(x, y)$ im angegebenen Bereich. Hinweis: Eine symmetrische 2x2-Matrix ist genau dann indefinit, wenn ihre Determinante negativ ist.

**126)** $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

**127)** $f(x, y) = 2x^3 - 5xy^2 + 3y$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

**128)** $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + x + y + 1$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

**129)** $f(x, y) = (x^2 + 5y^2)e^{-x^2-y^2}$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

**130)** $f(x, y) = x^2 + 3y^2 + e^{xy}$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

**131)** $f(x, y) = \sin(x + y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi/2$.

**132)** $f(x, y) = \sin(x + y) + \sin x - \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi/2$.

**133)** $f(x, y) = \cos(x + y) + \sin x + \sin y$ für $0 \le x, y \le \pi/2$.

**134)** Man bestimme die relativen Extrema der Funktion $f(x, y) = 4(x-2)(y^2+10y)+3x^3$.

**135)** Man bestimme die Extrema von $f(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$.

**136)** Gesucht ist das absolute Maximum der Funktion $f(x, y) = xy(3 - x - y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x, y)|x \ge 0, y \ge 0, y \le 3 - x\}$.

(Anleitung: Man skizziere den Definitionsbereich $D$ in der $(x, y)$-Ebene, bestimme dessen Rand und ermittle alle Funktionswerte auf dem Rand. Das absolute Maximum ist dann unter den relativen Maxima sowie unter den Funktionswerten am Rand von $D$ zu suchen.)

**137)** Mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren berechne man die Extrema der Funktion $f(x, y) = x + y$ unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$.

**138)** Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren den maximalen Wert von $3x + 2y$ unter der Nebenbedingung $x + y^2 = 0$.

**139)** Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren den maximalen Wert von $x - 3y$ unter der Nebenbedingung $x^2 - y = 0$.

**140)** Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren den minimalen Wert von $x^2 + y^2$ unter der Nebenbedingung $2x + 3y - 1 = 0$.

**141)** Man bestimme denjenigen Punkt auf der Ebene $z = x+y$, der von dem Punkt $(1, 0, 0)$ den kleinsten (euklidischen) Abstand hat.

**142)** Man bestimme mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren die extremalen Werte der Funktion $f(x, y) = xy$ auf der Einheitskreislinie.

143–146) Lösen Sie die folgenden Aufgaben mit Hilfe der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.

**143)** Man bestimme zu einer gegebenen Kugel einen eingeschriebenen Zylinder von maximaler Oberfläche.

**144)** Man bestimme zu einer gegebenen Kugel einen eingeschriebenen Zylinder von maximalem Volumen.

**145)** Man bestimme zu einer gegebenen Kugel einen eingeschriebenen Drehkegel von maximaler Oberfläche.

**146)** Man bestimme zu einer gegebenen Kugel einen eingeschriebenen Drehkegel von maximalem Volumen.

**147)** Welcher Quader mit gegebener Oberfläche $A$ besitzt maximales Volumen?

**148)** Welcher Kegelstumpf mit gegebener Oberfläche $A$ besitzt maximales Volumen?

**149)** Welcher Doppelkegel (=zwei Drehkegel mit gleicher Grundfläche, die an ihren jeweiligen Basisflächen zusammen geklebt sind) mit gegebener Oberfläche $A$ besitzt maximales Volumen?

**150)** Für welche Werte wird $f(x,y,z) = xyz$ unter den Nebenbedingungen $xy+yz+zx = a$ und $x+y+z = b$ möglichst groß?

**151)** Für welche Werte wird $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ unter den Nebenbedingungen $xy+yz+zx = a$ und $x+y+z = b$ möglichst groß?

**152)** Die Herstellung eines Produks $P$ unter Verwendung zweier Produktionsfaktoren $A$ und $B$ werde durch die Produktionsfunktion

$$\text{(NB)} \qquad y = f(x_1,x_2) = 5 - \frac{1}{\sqrt{x_1}} - \frac{1}{\sqrt{x_2}}$$

beschrieben. Der Gewinn des Produzenten sei durch

$$G(x_1,x_2,y) = yp_0 - x_1p_1 - x_2p_2$$

gegeben. Man maximiere den Gewinn für die Preise $p_0 = 2, p_1 = 1, p_2 = 8$ und unter Berücksichtigung der Nebenbedingung (NB), und ermittle die im Gewinnmaximum benötigten Faktormengen $x_1$, $x_2$, die Produktmenge $y$ und den Unternehmergewinn $G$.

**153)** Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x,y,z) = x+y+z^2$ unter den Nebenbedingungen $x^2-y^2+z^2 = 1$ und $x+y = 1$.

**154)** Bestimmen Sie die stationären Punkte der Funktion $f(x,y,z) = x-y+z^2$ unter den Nebenbedingungen $x^2+y^2+z^2 = 2$ und $x-y = 1$.

**155)** Man berechne das Bereichsintegral $\iint_B (xy+x^2-y^2)\,dx\,dy$ über dem Rechtecksbereich, welcher durch die Eckpunkte $(-1,1)$, $(5,1)$, $(5,5)$ und $(-1,5)$ bestimmt ist.

**156)** Man berechne das Bereichsintegral $\iint_B (xy+x^2-y^2)dxdy$ über dem Einheitskreis $x^2+y^2 \le 1$.

**157)** $B$ sei der durch $x = 4$, $y = 1$ und $x+2y = 2$ berandete beschränkte Bereich der $(x,y)$-Ebene. Man berechne $\iint_B 12x^2y^3dxdy$.

**158)** $B$ sei das durch die Punkte $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-2)$ und $(4,3)$ festgelegte Viereck. Berechnen Sie $\iint_B (xy-x^2+y^2)\,dx\,dy$.

**159)** $B$ sei das durch die Punkte $(-3,0)$, $(1,5)$ und $(2,-2)$ bestimmte Dreieck. Berechnen Sie $\iint_B (xy-x^2+y^2)\,dx\,dy$.

160–166) Berechnen Sie die folgenden Bereichssintegrale:

**160)** $\iint\limits_B \sin(x+y)\,dx\,dy$, $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Quadrat mit den Eckpunkten $(0,0), (0,\pi), (\pi,0), (\pi,\pi)$.

**161)** $\iint\limits_B \frac{x-y}{x+y}\,dx\,dy$, $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Dreieck mit den Eckpunkten $(2,2), (3,2), (3,3)$.

**162)** $\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (x+y)^2\,dx\,dy$

**163)** $\iiint\limits_Z x\,dx\,dy\,dz$, wobei $Z \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder $Z = \{(x,y,z)|1 \le z \le 2, 1 \le x^2+y^2 \le 2\}$ ist.

**164)** $\iiint\limits_Z x\,dx\,dy\,dz$, wobei $Z \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1 ist.

**165)** $\iiint\limits_Z xz(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$, wobei $Z \subset \mathbb{R}^3$ der Zylinder $Z = \{(x,y,z)|0 \le z \le 2, 1 \le x^2+y^2 \le 3\}$ ist.

**166)** $\iiint\limits_Z yz\,dx\,dy\,dz$, wobei $Z \subset \mathbb{R}^3$ die Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius 1 ist.

**167)** Berechnen Sie die Fläche einer Ellipse deren Haupt- bzw. Nebenachse die Länge $a$ bzw. $b$ hat. Hinweis: Benützen Sie die Transformation $x = a \cdot r \cdot \cos\phi$ und $y = b \cdot r \cdot \sin\phi$.

**168)** Berechnen Sie

$$\iint_B (x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

mit $B = \{(x, y) : \ 1 \le x^2 - y^2 \le 3,\ 3 \le xy \le 5\}$.
Hinweis: Man transformiere den Bereich gemäß

$$x(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}},$$
$$y(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{-u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}.$$

**169)** Berechnen Sie die Oberfläche des Rotationskörpers, der entsteht, wenn das durch

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1, \qquad -10 \le y \le 10,$$

gegebene Hyperbelstück um die $y$-Achse rotiert.
Hinweis: Das Integral $\int \sqrt{1 + x^2}\,dx$ läßt sich mit der Substitution $x = \sinh t$ ($dx = \cosh t\,dt$) berechnen. Man beachte weiters $\cosh t = (e^t - e^{-t})/2$.

**170)** Die Punkte $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 0)$ und $(0, 1, 0)$ seien die Eckpunkte eines Tetraeders. Bestimmen Sie dessen Volumen mit Hilfe eines geeigneten Bereichsintegrals.

**171)** In die Kugel $\{(x, y, z) \big| \ x^2 + y^2 + z^2 = 9\}$ werde ein zylindrisches Loch gebohrt. Der Zylinder sei durch $\{(x, y, z) \big| \ x^2 + 2x + y^2 \le 0\}$ gegeben. Wie groß ist das Restvolumen?

**172)** Das Ellipsoid mit Mittelpunkt $(0, 0, 0)$ und den Achsenlängen $5, 3, 3$ kann durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

Berechnen Sie die Oberfläche dieses Ellipsoids, indem Sie es als Rotationskörper auffassen.

**173)** Gegeben ist ein Kegel mit Höhe $h$ und Basiskreisradius $r$. Berechnen Sie die Mantelfläche, indem Sie den Kegel als Rotationskörper interpretieren.

**174)** Berechnen Sie die Oberfläche einer Kugel mit Radius $r$, indem Sie die Kugel als Rotationskörper interpretieren.

175–179) Man bestimme die Bogenlänge der folgenden Kurven.

**175)**

$$c(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \le t \le 2\pi.$$

Hinweis: Man substituiere $t = \sinh(u)/2$ und verwende $\cosh^2 u - \sinh^2 u = 1$ sowie $\cosh(u) = \frac{e^u + e^{-u}}{2}$.

**176)**

$$c(t) = \begin{pmatrix} t \\ -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, 0 \le t \le \pi.$$

**177)**

$$c(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 \\ -t^3 \\ 3t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 5.$$

**178)**

$$c(t) = \begin{pmatrix} \cos^3 t \\ \sin^3 t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

**179)**

$$c(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, 0 \leq x(t) \leq 5,$$

wobei $x = x(t)$ und $y = y(t)$ implizit durch $y^2 = x^3$ gegeben sind.

**180)** Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge:

$$x(t) = \begin{pmatrix} t^2/2 \\ \frac{1}{3}(2t+1)^{3/2} \end{pmatrix}, t \geq 0$$

**181)** Parametrisieren Sie folgende Kurve nach der Bogenlänge:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(t+1)^{3/2} \\ t^2/2 \end{pmatrix}, t \geq 0$$

182–185) Man berechne das Kurvenintegral der skalarwertigen Funktion $f$ längs der Kurve $c$.

**182)** $f(x, y) = 2x + 5y$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

**183)** $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$, $c(t) = (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

**184)** $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}}$, $c(t) = (\cos^2 t, \sin^2 t)$, $\pi/6 \leq t \leq \pi/3$.

**185)** $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $c(t) = (t\cos t, t\sin t, t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

**186)** Ein Turm habe die Form eines oben mittels einer Ebene abgeschnittenen Zylinders. Das Dach hat somit die Form einer Ellipse. Der Grundriß des Turms sei ein Kreis mit 12m Durchmesser, seine Höhe betrage 35m. Der tiefste Punkt des Dachs liegt in 30m Höhe. Wie groß ist die Fläche der Außenmauer dieses Turms.
Hinweis: Übersetzen Sie die Aufgabenstellung in ein geeignetes Kurvenintegral einer skalarwertigen Funktion und berechenen Sie dieses Integral.

**187)** Man berechne das Kurvenintegral über das Vektorfeld $u(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ x^2 - y^2 \end{pmatrix}$ entlang des Weges $3y^2 = 4x$ von $(0,0)$ nach $(3,2)$ und entlang des Streckenzugs $(0,0) \to (3,0) \to (3,2)$.

**188)** Zeigen Sie, daß das Kurvenintegral $\int\limits_c (\cos x\, dx + e^{-y}\, dy + z^2\, dz)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es über einen Weg von $(-1,3,4)$ nach $(6,9,-2)$.

**189)** Zeigen Sie, daß das Kurvenintegral $\int\limits_c (e^{-x}\, dx + \cos y\, dy + z^5\, dz)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es über einen Weg von $(1,2,3)$ nach $(-4,-5,-6)$.

**190)** Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral $\int\limits_c y\, dx + (y - x)\, dy$ nicht wegunabhängig ist, indem Sie zwei verschiedene Kurven von $(0,0)$ nach $(1,1)$ wählen, für welche die Werte der Kurvenintegrale verschieden sind.

**191)** Berechnen Sie $\int\limits_c y\, dx + x\, dy$ mit $c(t) = (t^2, t)$, $0 \leq t \leq 1$. Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?

**192)** Berechnen Sie $\int\limits_c y^2\,dx + x^2\,dy$ mit $c(t) = (t, \sqrt{t})$, $0 \le t \le 1$. Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?

**193)** Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral $\int_C (y^2\,dx + 2xy\,dy)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es von $(1,1)$ nach $(3,2)$
a) entlang des Streckenzuges $(1,1) \to (3,1) \to (3,2)$;
b) entlang der Geraden, die die Punkte $(1,1)$ und $(3,2)$ verbindet.

**194)** Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral $\int_C (\sin y\,dx + x\cos y\,dy)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es von $(-1,0)$ nach $(0,2)$
a) entlang des Streckenzuges $(-1,0) \to (0,0) \to (0,2)$;
b) entlang der Geraden, die die Punkte $(-1,0)$ und $(0,2)$ verbindet.

**195)** Zeigen Sie, dass das Kurvenintegral $\int_C (e^x \sin y\,dx + e^x \cos y\,dy)$ wegunabhängig ist und berechnen Sie es von $(-1,-1)$ nach $(2,0)$
a) entlang des Streckenzuges $(-1,-1) \to (-1,0) \to (2,0)$;
b) entlang der Geraden, die die Punkte $(-1,-1)$ und $(2,0)$ verbindet.

**196)** Berechnen Sie $\int\limits_c e^x\,dx + e^y\,dy$ mit $c(t) = (\sqrt{t}, \ln t)$, $1 \le t \le 2$. Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?

**197)** Berechnen Sie $\int\limits_c y^2 e^x\,dx + 2ye^x\,dy$ mit $c(t) = (1, \tan t)$, $0 \le t \le \pi/4$. Ist das Kurvenintegral wegunabhängig?

**198)** Man bestimme, falls möglich, ein Potential des Vektorfeldes

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2y}{(x+y)^2} \\ -\frac{2x}{(x+y)^2} \end{pmatrix}.$$

In welchen Gebieten $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Kurvenintegral über das Vektorfeld $u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wegunabhängig?

**199)** Man bestimme, falls möglich, ein Potential des Vektorfeldes

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{1+(x^2+y)^2} \\ \frac{1}{1+(x^2+y)^2} \end{pmatrix}.$$

In welchen Gebieten $B \subset \mathbb{R}^2$ ist das Kurvenintegral über das Vektorfeld $u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ wegunabhängig?

**200)** Sei $\alpha \in \mathbb{Z}$. Man untersuche, für welche $\alpha$ das Vektorfeld $\mathbf{f}(x,y) = (y^{\alpha-1}, (\alpha-1)xy^{\alpha-2})$ eine Stammfunktion besitzt und berechne diese gegebenenfalls.

**201)** Welches der folgenden Vektorfelder $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ ist ein Gradientenfeld und wie lautet ggf. eine zu $\mathbf{f}$ gehörende Stammfunktion?

$(a)$ $(1,1,1)$, $(b)$ $(-x,-y,-z)$, $(c)$ $(2x,2y,0)$, $(d)$ $(yz, xz, x^2)$.

**202)** Man überprüfe, ob das Vektorfeld $\mathbf{f} = (yz, (x-2y)z, (x-y)y)$ eine Stammfunktion besitzt. Wenn ja, gebe man alle Stammfunktionen an.

**203)** Das elektrostatische Potential einer Punktladung $Q$ im Koordinatenursprung ist durch

$$\varphi_1(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

gegeben, für das Potential eines Dipols mit dem Dipolmoment $\mathbf{p} = (p, 0, 0)$ gilt:

$$\varphi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{px}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

(Dabei sind $Q$, $p$ und $\epsilon_0$ Konstante.) In beiden Fällen berechne man das zugehörige elektrische Feld $\mathbf{E}$ nach der Formel $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\varphi$.

**204)** Man finde alle Lösungen der Differenzengleichung

$$\begin{array}{ll} (a) & 2x_{n+1} - 3x_n + 1 = 0 \quad (n \geq 0), \\ (b) & x_{n+1} - x_n + 7 = 0 \quad (n \geq 0). \end{array}$$

**205)** Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+1} = \frac{2}{3} x_n + 1 \quad (\text{für } n \geq 0)$$

und die partikuläre Lösung, die der Anfangsbedingung $x_0 = 6$ genügt.

**206)** Man bestimme die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + x_n}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

mit $x_0 \neq -1, -1/2, -1/3, \ldots$.
(Hinweis: Man benütze die Transformation $x_n = 1/y_n$.)

**207)** Gesucht ist die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$x_{n+1} = 3^{2n} x_n + 3^{n^2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

**208)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $a_n = \frac{n}{n+2} a_{n-1} + \frac{1}{n^2+3n+2}$.

**209)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $a_n = \frac{n+2}{3n} a_{n-1} + n^2 + 3n + 2$.

**210)** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzengleichung $a_n = \sqrt{n(n+1)} a_{n-1} + n!(n+1)^{3/2}$.

**211)** Beim Sortieren von $n$ Zahlen durch "Direktes Einfügen" gilt für die Anzahl $v_n$ der Vergleiche (im ungünstigsten Fall)

$$v_1 = 0 \quad \text{und} \quad v_n = v_{n-1} + n - 1, \quad n = 2, 3, \ldots$$

und für die Zahl $w_n$ der Wertzuweisungen

$$w_1 = 0 \quad \text{und} \quad w_n = w_{n-1} + n + 1, \quad n = 2, 3, \ldots.$$

Warum? Man bestimme explizite Formeln für $v_n$ und $w_n$ und schätze deren Größenordnungen (in der $\mathcal{O}$-Notation) ab.

**212)** Man bestimme die Lösung der Differenzengleichung $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$ (für $n \geq 0$) zum Anfangswert $x_0 = 0$ auf graphischem Weg, berechne die Gleichgewichtspunkte und überprüfe sie auf Stabilität.

**213)** Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichungen

$$\begin{array}{ll} (a) & x_{n+2} - 5x_{n+1} - 6x_n = 0, \\ (b) & x_{n+2} - 6x_{n+1} + 12x_n = 0, \\ (c) & x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6.25x_n = 0. \end{array}$$

**214)** Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} (a) \quad & x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = 0, \\ (b) \quad & x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0, \\ (c) \quad & x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 0. \end{aligned}$$

**215)** Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} (a) \quad & x_{n+2} + 12x_{n+1} + 36x_n = 0, \\ (b) \quad & x_{n+2} - 2x_{n+1} + 5x_n = 0, \\ (c) \quad & x_{n+2} + 11x_{n+1} + 28x_n = 0. \end{aligned}$$

**216)** Gesucht sind die allgemeinen Lösungen der linearen homogenen Differenzengleichungen

$$\begin{aligned} (a) \quad & x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0, \\ (b) \quad & x_{n+2} - 6x_{n+1} + 25x_n = 0, \\ (c) \quad & x_{n+2} + 11x_{n+1} + 30.25x_n = 0. \end{aligned}$$

**217)** Man bestimme die Lösung nachstehender Differenzengleichung zu den vorgegebenen Anfangsbedingungen:

$$4x_{n+2} + 12x_{n+1} - 7x_n = 36, \quad x_0 = 6, \;\; x_1 = 3.$$

**218)** Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 8 + 3^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

**219)** Man bestimme die Anzahl aller 0-1-Folgen der Länge $n$, in denen es keine benachbarten Nullen gibt.

(Anleitung: Man stelle zunächst eine geeignete Rekursionsgleichung auf und bestimme dann deren Lösung.)

**220)** Sei $a_n$ die Anzahl aller $n$-stelligen Zahlen, in denen je 3 aufeinander folgende Ziffern keinen Block der Form 000, 111, 222, ..., 999 bilden. Zeigen Sie, dass $a_1 = 10$, $a_2 = 100$ und $a_n = 9a_{n-1} + 9a_{n-2}$ gilt, und bestimmen Sie $a_n$.

**221)** Man verwende die Methode der erzeugenden Funktionen zur Bestimmung der allgemeinen Lösung der Differenzengleichung erster Ordnung $x_{n+1} - x_n + 5 = 0$ für $n = 0, 1, 2, \ldots$.

**222)** Man finde die Lösung der Differenzengleichung zweiter Ordnung $x_{n+2} = 5x_{n+1} - 4x_n$ zu den Anfangsbedingungen $x_0 = 2$ und $x_1 = 5$ mit Hilfe der Methode der erzeugenden Funktionen.

223–236) Lösen Sie die Rekursion mit der Ansatzmethode:

**223)** $a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1$.

**224)** $a_n = 2a_{n-1} + 2^{2n-2}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 5$.

**225)** $a_n = 3a_{n-1} + 3^{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

**226)** $a_n = 5a_{n-1} + 2^{n-1} - 6n5^n$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

**227)** $a_n = 2a_{n-1} + (1 + 2^n)^2$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2$.

**228)** $a_n + a_{n-1} + a_{n-2} = 1 + \sin(2n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 3$, $a_1 = -1$.

**229)** $a_n - a_{n-1} + 2a_{n-2} = 1 + \cos(2n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -2$.

**230)** $a_n - a_{n-2} = \sin(n)$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 7$, $a_1 = -12$.

**231)** $2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (n^2 + 3n - 4)3^n$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 10$, $a_1 = -7$.

**232)** $2a_n - 7a_{n-1} + 6a_{n-2} = (3n - 10)2^{n+2}$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$.

**233)** $a_n - a_{n-1} - a_{n-2} + a_{n-3} = 1$ $(n \geq 3)$, $a_0 = 3$, $a_1 = a_2 = -1$.

**234)** $a_n - a_{n-1} + a_{n-2} = n^2 2^n$ $(n \geq 2)$, $a_0 = 1$, $a_1 = -1$.

**235)** $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 2^{2n-2} - n^2 5^{n+3}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

**236)** $a_n + 3a_{n-1} + 3a_{n-2} + a_{n-3} = 2^n - 3(-1)^n$ $(n \geq 3)$, $a_0 = a_1 = a_2 = 1$.

237–242) Berechnen Sie die folgenden Summen durch Aufstellen und Lösen einer Rekursion.

**237)** $\sum_{i=1}^{n} i$

**238)** $\sum_{i=1}^{n} i^2$

**239)** $\sum_{i=1}^{n} q^n$

**240)** $\sum_{i=1}^{n} nq^n$

**241)** $\sum_{i=1}^{n} i(i-1)$

**242)** $\sum_{i=1}^{n} n^2 q^n$

243–250) Stellen Sie eine Rekursion für die gesuchten Zahlen $a_n$ auf und lösen Sie diese:

**243)** Es sei $a_n$ die Anzahl aller Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, die keine zwei aufeinanderfolgenden Zahlen enthalten.

**244)** Es sei $a_n$ wie in Bsp. 243), jedoch gilt jetzt auch 1 als Nachfolger von $n$ (zyklische Anordnung).

**245)** $a_n$ sei die größte Anzahl von Teilen, in die die Ebene durch $n$ Geraden zerlegt werden kann.

**246)** Es sei $a_n$ die Anzahl aller Folgen der Länge $n$ aus `0` und `1`, die keine zwei aufeinanderfolgenden Einser enthalten.

**247)** $a_n$ sei die größte Anzahl von Teilen, in die eine Kugel durch $n$ Großkreise zerlegt werden kann. (Ein Großkreis ist ein Kreis auf der Kugel, dessen Mittelpunkt gleich dem Kugelmittelpunkt ist.)

**248)** $a_n$ sei die Anzahl aller $n$-stelligen Zahlen, in denen je zwei aufeinander folgende Ziffern verschieden sind.

**249)** Sei $a_n$ die Anzahl der Wörter der Länge $n$, gebildet aus den Buchstaben $a$, $b$ und $c$, in denen die Anzahl der $a$ gerade ist.

**250)** Eine Münze werde so oft geworfen, bis man insgesamt zweimal das Ergebnis „Kopf" erhält. Auf diese Art erhält eine Folge, deren Glieder entweder „Kopf" oder „Zahl" sind. $a_n$ bezeichne die Anzahl der möglichen Folgen der Länge $n$.

**251)** Lösen Sie die Rekursion $a_{n+1} = a_n^2 / a_{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

**252)** Lösen Sie die Rekursion $a_{n+1} = a_n a_{n-1}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 1, a_1 = 2$.

**253)** Lösen Sie die Rekursion $a_{n+1} = 2a_n a_{n-1} / a_{n-2}$ $(n \geq 1)$, $a_0 = 2, a_1 = 0$.

**254)** Lösen Sie die Rekursion aus Bsp. 225) mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

**255)** Lösen Sie die Rekursion aus Bsp. 226) mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

**256)** Lösen Sie die Rekursion aus Bsp. 227) mit Hilfe von erzeugenden Funktionen.

**257)** Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 2a_n + 4b_n$, $b_{n+1} = 3a_n + 3b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = b_0 = 1$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

**258)** Man löse das System von Rekursionen $a_{n+1} = 3a_n + 5b_n$, $b_{n+1} = 4a_n + 4b_n$ $(n \geq 0)$ mit den Startwerten $a_0 = b_0 = 2$ unter Benützung erzeugender Funktionen.

**259)** Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_g(x) = \sum_{k\geq 0} a_{2k} x^{2k}$ aus.

**260)** Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$. Man drücke mit Hilfe von $A(x)$ und $A(-x)$ die erzeugende Funktion $A_u(x) = \sum_{k\geq 0} a_{2k+1} x^{2k+1}$ aus.

**261)** Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und $b_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k$. Man drücke $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ mit Hilfe von $A(x)$ aus.

**262)** Sei $A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n$ die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$ und $b_n = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$. Man drücke $B(x) = \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ mit Hilfe von $A(x)$ aus.

263–266) Man bestimme die erzeugende Funktion der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$:

**263)** $a_n = n^2 + 2^n$

**264)** $a_n = n + n3^n$

**265)** $a_n = n(n-1) + (-1)^n$

**266)** $a_n = n(-1)^n + 2^{-n}$

267–268) Man bestimme mit Hilfe erzeugender Funktionen:

**267)** $s_n = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)$

**268)** $s_n = \sum_{k=0}^{n} k^2$

**269)** Durch Einsetzen bestätige man, daß die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6y = 12 \ln x$$

durch

$$y(x) = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x^2} - 2\ln x + \frac{1}{3}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

gegeben ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 2/3$, $y'(1) = -1$?

**270)** Man zeige, daß jede Funktion $z(x,y) = \frac{1}{a}x + C(y - \frac{b}{a}x)$, wo $C(u)$ eine willkürlich gewählte Funktion in einer Variablen ist, Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1$$

ist. Wie lautet die Lösung zur Anfangsbedingung $z(x=0,y) = y^2 + 1$?

**271)** Man betrachte die inhomogene Eulersche Differentialgleichung

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0.$$

Zeigen Sie, dass $C_1 \frac{1}{x} + C_2 \frac{\log x}{x}$ die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist. Wie lautet die partikuläre Lösung zu den Anfangsbedingungen $y(1) = 3$, $y'(1) = -2$?

**272)** Man zeige: $u = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ genügt der Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

**273)** Man zeige: $u = \ln\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ genügt der Differentialgleichung $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

**274)** Man zeige: $z = e^{-kn^2t} \sin nx$ genügt der Wärmeleitungsgleichung $z_t = kz_{xx}$.

**275)** Man ermittle das Richtungsfeld der Differentialgleichung $y' = \frac{y}{x}$ und überlege, ob es durch jeden Punkt der $(x,y)$-Ebene genau eine Lösung der Gleichung gibt.

**276)** Gegeben ist die Differentialgleichung $y' = axy$ mit $a$ reell. Man skizziere das Richtungsfeld und die Isoklinen für $a = -2$, $a = -1$ und $a = 1$.

**277)** Man löse die homogene lineare Differentialgleichung $y' - y \tan x = 0$.

**278)** Man löse die inhomogene lineare Differentialgleichung $xy' + y = x^2 + 3x + 2$.

**279)** Man bestimme die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y' + y \cos x = \sin x \cos x$ zur Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

**280)** Man löse die Differentialgleichung $y' = \frac{x}{x-y}$ mit der Isoklinenmethode.

**281)** Man berechne für $y' = x + y^2$ und die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ mit dem Polygonzugverfahren die Werte $y(0,1)$ und $y(0,2)$.

**282)** Mit der Methode der sukzessiven Approximation berechne man für $y' = x - y^2$ und $y(0) = 1$ den Wert von $y(0,1)$ auf 3 Dezimalen genau.

283–285) Man löse die Differentialgleichungen durch Trennung der Veränderlichen.

**283)** $4x\,dy - y\,dx = x^2\,dy$

**284)** $(1 + 2y)\,dx - (4 - x)\,dy = 0$

**285)** $\cos y\,dx + (1 - e^{-x}) \sin y\,dy = 0$ (für $x = 0$ sei $y = \pi/2$)

**286)** Bestimmen Sie die vollständige Lösung der Differentialgleichung

$$(x^2 - 1)y' = y.$$

Für welche Anfangswerte von $(x_0, y_0)$ ist das zugehörige AWP $y(x_0) = y_0$ nicht oder nicht eindeutig lösbar? Welche Voraussetzungen des Existenz- und Eindeutigkeitssatzes sind dabei verletzt?

287–290) Man löse die exakten Differentialgleichungen.

**287)** $(x + y + 1)\,dx - (y - x + 3)\,dy = 0$

**288)** $(2xye^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)\,dx + (x^2e^{x^2y} + 2xye^{xy^2} - 2y)\,dy = 0$

**289)** $(4x^3y^3 + \frac{1}{x})\,dx + (3x^4y^2 - \frac{1}{y})\,dy = 0$

**290)** $(\cos y + y \cos x)\,dx + (\sin x - x \sin y)\,dy = 0$

291–292) Man löse mittels integrierendem Faktor:

**291)** $(x - y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$, $M = x^{-2}$.

**292)** $y(3 - 5x^2y)\,dx + x(2 - 3x^2y)\,dy = 0$, $M = x^2y$.

293–296) Man löse die homogenen Differentialgleichungen.

**293)** $(2x + 3y)\,dx + (y - x)\,dy = 0$

**294)** $(x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x})\,dx + x \cos \frac{y}{x}\,dy = 0$

**295)** $(x^2 + y^2)\,dx + xy\,dy = 0$ (für $x = 1$ sei $y = -1$)

**296)** $(x\sqrt{x^2 + y^2} - y)\,dx + (y\sqrt{x^2 + y^2} - y)\,dy = 0$

297–303) Man bestimme die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bzw. die Lösung der Anfangswertaufgabe:

**297)** $y' + \frac{1}{1-x}y = x^2,\ y(0) = 1$

**298)** $y' + \frac{1}{1+2x}y = 2x - 3,\ y(0) = 2$

**299)** $x^2y'' - 5xy' + 5y = 0$, wobei $y_1(x) = x^3$ bekannte Lösung ist.

**300)** $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$, wobei $y_1(x) = x$ und $y_2(x) = x^2$ bekannte Lösungen sind.

**301)** $y'' - y = 4e^x$

**302)** $y'' + 7y' + 6y = \cosh(x)$

**303)** $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x}$

304–317) Man löse die Differentialgleichungen.

**304)** $xy' - y = x^3 + 3x^2 - 2x$

**305)** $y' + \frac{y}{x} - e^x = 0$

**306)** $y' + 2(\cot x)y + \sin 2x = 0$

**307)** $y' + y\cot x = 5e^{\cos x}$ (für $x = \pi/2$ sei $y = -4$)

**308)** $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}$

**309)** $y'' - 2y' = e^x \sin x$

**310)** $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$ (mittels Variation der Konstanten)

**311)** $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{x^2}$ (mittels Variation der Konstanten)

**312)** $x^2y'' + 3xy' + y = 0$

**313)** $x^2y'' - xy' + y = x$

**314)** $y' = -\frac{1}{x}y + \frac{\log x}{x}y^2$

**315)** $y' + 2xy = 2x^3y^3$

**316)** $y' = y^2 + (1 - 2x)y + (1 - y + x^2)$ $(y_1 = x)$

**317)** $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$ $(y_1 = -x^{-1})$

**318)** Vom neuesten Modell eines Mobiltelefonproduzenten werden im Weihnachstgeschäft 3000 Stück abgesetzt, nach 12 Monaten sind davon nur mehr 2820 Stück in Betrieb. Unter der Annahme, daß die monatliche Ausscheidungsrate proportional zur Nutzungsdauer ist, bestimme man die Anzahl $y(t)$ der in Betrieb stehenden Mobiltelefone (von den ursprünglich 3000 Stück) in Abhängigkeit von ihrer Verwendungsdauer $t$, sowie die längste Nutzungsdauer.

**319)** Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 8y' - 20y = 0, \\ &(b) \quad y'' + 8y' + 16y = 0, \\ &(c) \quad y'' - 8y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

**320)** Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 6y' - 27y = 0, \\ &(b) \quad y'' + 6y' + 9y = 0, \\ &(c) \quad y'' - 6y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

**321)** Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} &(a) \quad y'' - 12y' + 36y = 0, \\ &(b) \quad y'' + 12y' + 60y = 0, \\ &(c) \quad y'' - 12y' + 25y = 0. \end{aligned}$$

**322)** Man löse die folgenden linearen homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}
&(a) \quad y'' - 10y' + 100y = 0,\\
&(b) \quad y'' + 10y' + 16y = 0,\\
&(c) \quad y'' - 10y' + 25y = 0.
\end{aligned}$$

**323)** Man bestimme die partikuläre Lösung der Differentialgleichung $y'' + 2y' + 2y = 0$ zu den Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ und $y'(0) = 0$.

**324)** Gesucht ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y'' - y' - 2y = x$.

**325)** Man berechne alle möglichen Gleichgewichtszustände der nichtlinearen Differentialgleichung

$$y' = \Big(\frac{8y}{y+1} - y - 1\Big)y$$

und überprüfe sie auf Stabilität.

326–328) Man bestimme mit Hilfe der Bisektion auf drei Dezimalstellen genau die positive Nullstelle der Funktion $f(x)$ im angegebenen Intervall $I$:

**326)** $f(x) = \sin x - \frac{x}{2}$, $I = [\pi/2, \pi]$.

**327)** $f(x) = \cos x - x$, $I = [0, \pi/2]$.

**328)** $f(x) = (\tan x)^2 - x$, $|x| < \frac{\pi}{4}$

**329)** Man zeige, daß die Funktion $\varphi(x) = x - e^{-x} + \cos x$ eine kontrahierende Abbildung des Intervalls $[1.2, 1.3]$ in sich ist, und berechne den (einzigen) Fixpunkt $x^*$ dieser Funktion im angegebenen Intervall.

**330)** Gesucht ist eine in der Nähe von

$$(a) \quad x_0 = 3, \qquad \text{bzw.} \qquad (b) \quad x_0 = -3$$

gelegenen Nullstelle der Funktion $f(x) = e^{-x} + x^2 - 10$.

**331)** Nach welcher Zeit $t$ (in Stunden) erreichen die Betriebskosten

$$B(t) = 10.45t + 0.0016t^2 + 17200\big(1 - e^{-0.0002t}\big)$$

eines Netzwerkrouters den Anschaffunspreis $A = 100.000,-$ € ? Ist die Lösung eindeutig bestimmt?

(Anleitung: Man bilde die Funktion $f(t) = B(t) - A$, untersuche deren Monotonieverhalten und bestimme schließlich die gesuchte Nullstelle mit Hilfe des Newton-Verfahrens.)

**332)** Man bestimme die Lösungsfolge der beim "Babylonischen Wurzelziehen" auftretenden Iteration

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) = \frac{1}{2}\Big(x_n + \frac{a}{x_n}\Big), \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

(wobei $a > 0$, $x_0 > 0$ ist) auf graphischem Weg und zeige, daß stets

$$x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \cdots \geq \sqrt{a}$$

gilt, d.h., die Iterationsfolge $(x_n)$ ist ab $n = 1$ monoton fallend und nach unten durch $\sqrt{a}$ beschränkt.

**333)** Man zeige: Für $a \neq 0$ konvergiert die Iterationsfolge $(x_n)$ gemäß $x_{n+1} = 2x_n - ax_n^2$ mit $\frac{1}{2a} < x_0 < \frac{3}{2a}$ gegen den Fixpunkt $x^* = \frac{1}{a}$. Diese Iteration stellt somit ein Verfahren zur Division unter ausschließlicher Verwendung von Multiplikationen dar.

**334)** Man löse das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -0.35x_1 & +1.5x_2 & +122.2x_3 & = & 126 \\ 105.7x_1 & -440.9x_2 & -173.7x_3 & = & -1285 \\ 21.5x_1 & -101.8x_2 & +33.4x_3 & = & -229 \end{array}$$

mit Hilfe des Gaußschen Eliminationsverfahrens $(a)$ ohne Pivotisierung, $(b)$ mit Pivotisierung bei einer Rechengenauigkeit von 4 signifikanten Stellen.

**335)** Man vergleiche die Lösungen der beiden linearen Gleichungssysteme $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_1$, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}_2$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 3.9 & -10.7 \\ -9.3 & 25.5 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -290 \\ 690 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -291 \\ 689 \end{pmatrix}.$$

Was kann daraus geschlossen werden?

**336)** Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} -x_1 & +5x_2 & -2x_3 & = & 3 \\ x_1 & +x_2 & -4x_3 & = & -9 \\ 4x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 8 \end{array}$$

unter Anwendung des Gesamtschrittverfahrens von Jacobi, wobei man zunächst die einzelnen Gleichungen derart umordne, daß das entstehende System das Zeilensummenkriterium erfüllt.

**337)** Man bestimme die Lösung des Gleichungssystems aus Aufgabe 336) mit Hilfe des Einzelschrittverfahrens von Gauß-Seidel.

**338)** Man zeige: Die Anzahl der Punktoperationen zur Lösung eines linearen Gleichungssystems mit $n$ Gleichungen und $n$ Unbekannten beträgt

(a) $(n^2 - 1)n! + n$ bei Anwendung der Cramerschen Regel,
(Hinweis: Die Auswertung einer $n \times n$-Determinante erfordert $(n-1)n!$ Multiplikationen.)

(b) $\frac{n}{3}(n^2 + 3n - 1)$ beim Eliminationsverfahren von Gauß,

(c) $n^2$ pro Schritt für das Iterationsverfahren von Jacobi oder Gauß-Seidel.

**339)** Die folgende Tabelle gibt die Entwicklung der Weltbevölkerung (in Milliarden) seit dem Jahr 1950 wieder:

| Jahr $t$ | 1950 | 1960 | 1970 | 1980 | 1990 | 2000 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Bevölkerung $f(t)$ | 2.5 | 3 | 3.6 | 4.4 | 5.3 | ? |

Man finde eine Trendfunktion der Form $g(t) = ce^{at}$ und extrapoliere die Bevölkerungszahl für das Jahr 2000.

(Hinweis: Man bestimme die Ausgleichsgerade für die Wertepaare $(t, \ln g(t))$ nach der Methode der kleinsten Quadrate.)

**340)** Der Gebrauchswert einer Maschine betrage nach zwei Jahren noch 50%, nach vier Jahren noch 25% des Anschaffungspreises. Man gebe ein Polynom $p(t)$ 2. Grades als Funktion der Nutzungsdauer $t$ an, das mit diesen empirischen Daten übereinstimmt und für $t = 0$ den Wert 100 (Neuwert mit 100%) annimmt. Ferner vergleiche man die Erfahrungswerte von 70% Gebrauchtwert nach einem Jahr und 35% nach drei Jahren mit den entsprechenden $p$-Werten.

**341)** Man bestimme das Interpolationspolynom dritten Grades zu den Interpolationsstellen $(0, 180)$, $(2, 240)$, $(4, 320)$ und $(6, 360)$ durch Lagrange-Interpolation.

**342)** Man löse das Interpolationsproblem aus Aufgabe 341) unter Anwendung des Newtonschen Interpolationsverfahrens. Wie lauten die Funktionswerte des Interpolationspolynoms an den Stellen $x = 1, 3, 5$?