215) Man zeige, dass $\langle \mathbb{Z}, \bullet \rangle$ mit der Operation

$$a \bullet b = a + b - ab, \ \forall a, b \in \mathbb{Z}$$

eine Halbgruppe ist. Gibt es ein neutrales Element? Wenn ja, welche Elemente haben Inverse?

216) Sind X und Y Mengen von Wörtern über einem Alphabet, dann bezeichne $XY = \{w_1 w_2 | w_1 \in X, w_2 \in Y\}$. Für $A = \{a\}$ und $B = \{b, c\}$ bestimme man

$$A^*, \ B^*, \ A^*B, \ AB^*, \ (A \cup B)^* \ \text{ und } \ ABA^*B.$$

217–235) Untersuchen Sie, ob die Menge M mit der Operation $\circ$ ein Gruppoid, eine Halbgruppe, ein Monoid bzw. eine Gruppe ist:

217) $M = \{0, 1, 2\}$, $m \circ n = \min(m + n, 2)$

218) $M = \{0, 1, 2, 3\}$, $m \circ n = \min(mn, 3)$

219) $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $m \circ n = mn$

220) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, $z_1 \circ z_2 = \frac{z_1 z_2}{2}$

221) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

222) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

223) $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2 \text{ oder } |z| = \frac{1}{2}\}$, $z_1 \circ z_2 = z_1 z_2$

224) $M = \mathfrak{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \cup C$.

225) $M = \mathfrak{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \cap C$.

226) $M = \mathfrak{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \triangle C$ (die symmetrische Differenz).

227) $M = \mathfrak{P}(A)$, d. h. die Potenzmenge der Menge A, $B \circ C = B \setminus C$ (die Mengendifferenz).

228) $M = \mathbb{Q}$, $a \circ b = a - b$.

229) $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}$, $a \circ b = \frac{a+b}{1+ab}$.

230) $M = \mathbb{Q}$, $a \circ b = ab + 1$.

231) $M = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, $a \circ b = a + b - ab$.

232) $M = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $a \circ b = a/b$.

233) $M = \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$, $a \circ b = a + b + ab$.

234) $M = \mathbb{N}$, $a * b = \max\{a, b\}$.

235) $M = \mathbb{N}$, $a * b = \min\{a, b\}$.

236–237) Man ergänze die folgende Operationstafel so, daß $\langle G = \{a, b, c\}, * \rangle$ eine Gruppe ist.

236)

*	a	b	c
a	a		
b			
c			

237)

*	a	b	c
a	b		
b			
c			

238–239) Man ergänze die folgende Operationstafel so, daß $\langle G = \{a, b, c, d\}, * \rangle$ eine Gruppe ist.

238)

*	a	b	c	d
a	a			
b		a		
c			a	
d				

239)

*	a	b	c	d
a	a			
b		c		
c				
d				

240) Man zeige: Gilt für ein Element a einer Gruppe G: $a * a = a$, dann ist a das neutrale Element von G.

241) Man zeige: Eine nichtleere Teilmenge U einer endlichen Gruppe G ist genau dann Untergruppe von G, wenn

$$a, b \in U \ \Rightarrow \ ab \in U$$

für alle $a, b \in G$ gilt.

242) Man bestimme alle Untergruppen der Gruppe S_3 aller Permutationen von drei Elementen mit der Operation der Hintereinanderausführung.

243) Man bestimme alle Untergruppen einer zyklischen Gruppe der Ordnung 6, d. h., von $G =$ $\{e, a, a^2, a^3, a^4, a^5\}$.

244) Man zeige: Der Durchschnitt zweier Untergruppen ist wieder eine Untergruppe.
Gilt dies auch für die Vereinigung zweier Untergruppen?

245) Sei G die Menge der Permutationen

$$\{(1), (13), (24), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1234), (1432)\}.$$

Man veranschauliche G, indem man die Permutationen auf die vier Eckpunkte eines Quadrates wirken lasse und als geometrische Operationen interpretiere. Man zeige mit Hilfe dieser Interpretation, dass G eine Untergruppe der symmetrischen Gruppe S_4 ist (Symmetriegruppe des Quadrates), und bestimme alle Untergruppen.

246) In der Symmetriegruppe des Quadrates aus Aufgabe 245) bestimme man die Rechts- bzw. Linksnebenklassenzerlegung nach einer (a) von einer Drehung, (b) von einer Spiegelung erzeugten Untergruppe.

247) Sei U die von (1)(23) erzeugte Untergruppe der S_3. Man bestimme die Rechtsnebenklassen von U. Ist U Normalteiler von S_3?

248) Sei U die von (2)(13) erzeugte Untergruppe der S_3. Man bestimme die Linksnebenklassen von U. Ist U Normalteiler von S_3?

249) Sei U die von (123) erzeugte Untergruppe der S_3. Man bestimme die Linksnebenklassen von U. Weiters stelle man fest, ob U Normalteiler von S_3 ist und bestimme gegebenenfalls die Gruppentafel der Faktorgruppe S_3/U.

250) Man zeige, daß die von $\bar{3}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle \mathbb{Z}_9, + \rangle$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_9, + \rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_9/U$.

251) Man zeige, daß die von $\bar{4}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{12}/U$.

252) Man zeige, daß die von $\bar{5}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle \mathbb{Z}_{15}, + \rangle$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_{15}, + \rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{15}/U$.

253) Man zeige, daß die von $\bar{3}$ erzeugte Untergruppe U von $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$ ein Normalteiler von $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$ ist und bestimme die Gruppentafel der Faktorgruppe $\mathbb{Z}_{12}/U$.

254) Man zeige: Das Zentrum $Z(G) = \{x \in G \mid x \cdot y = y \cdot x \text{ für alle } y \in G\}$ einer Gruppe $\langle G, \cdot \rangle$ ist Normalteiler von G.

255–256) Definition: Der Kommutator $K(G)$ einer Gruppe G ist jene Untergruppe von G, die von allen Elementen $xyx^{-1}y^{-1}$ $(x, y \in G)$ erzeugt wird.

255) Man zeige: $K(G)$ ist ein Normalteiler von G.
(Hinweis: Man beweise zunächst $axyx^{-1}y^{-1}a^{-1} = (ax)y(ax)^{-1}y^{-1}yay^{-1}a^{-1}$.)

256) Man zeige: Die Faktorgruppe $G/K(G)$ ist kommutativ. (Hinweis: $ab = baa^{-1}b^{-1}ab$.)

257) Sei $\varphi : G \to H$ ein bijektiver Gruppenhomomorphismus. Man zeige, daß dann auch $\varphi^{-1} : H \to G$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

258) Seien $\varphi : G \to H$ und $\psi : H \to K$ Gruppenhomomorphismen. Man zeige: $\psi \circ \varphi : G \to K$ ist auch ein Gruppenhomomorphismus.

259) Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und e das neutrale Element von G. Man zeige, daß $\varphi(e)$ das neutrale Element von H ist. (Hinweis: Man verwende Bsp. 240.)

260) Sei $\varphi : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus und N ein Normalteiler von H. Man zeige, daß dann $U = \varphi^{-1}(N)$ ein Normalteiler von G ist.

261) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe der von 0 verschiedenen Restklassen modulo 5 mit der Multiplikation.

262) Bestimmen Sie alle Untergruppen der Gruppe der Restklassen modulo 4 mit der Addition.

263) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle \mathbb{Z}_{12}, + \rangle$.

264) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle \mathbb{Z}_{13}, + \rangle$.

265) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle \mathbb{Z}_{18}, + \rangle$.

266) Man bestimme alle Untergruppen der $\langle \mathbb{Z}_{19}, + \rangle$.

267) Von der Abbildung $f : (\mathbb{Z}_3)^2 \to (\mathbb{Z}_3)^4$ sei bekannt, daß f ein Gruppenhomomorphismus bezüglich der Addition ist (die jeweils komponentenweise definiert sein soll), sowie daß $f(0,1) = (0,1,1,2)$, $f(1,0) = (1,0,2,0)$. Man ermittle daraus $f(w)$ für alle $w \in (\mathbb{Z}_3)^2$.

268) Wie Bsp. 267) für $f(1,0) = (0,1,2,1)$, $f(0,1) = (1,0,0,2)$.

269) Wie Bsp. 267) für $f(1,0) = (1,0,0,2)$, $f(1,1) = (1,2,0,1)$.

270) Wie Bsp. 267) für $f(2,0) = (0,1,2,2)$, $f(1,2) = (2,2,1,0)$.

271) Man bestimme die „primen" Restklassen modulo 9, d. h. alle Restklassen $\bar{a}$ mit $\mathrm{ggT}(a,9) = 1$. Man zeige, daß die Menge Γ_9 dieser primen Restklassen bezüglich der Restklassenmultiplikation eine Gruppe bildet.

272) Wie Bsp. 271) für die primen Restklassen modulo 16.

273) Wie Bsp. 271) für die primen Restklassen modulo 18.

274) Sei $\langle \Gamma_9, \cdot \rangle$ die Gruppe aus Bsp. 271). Man bestimme die vom Element $\bar{8}$ erzeugte Untergruppe sowie deren Nebenklassen in Γ_9.

275) Sei $\langle \Gamma_{16}, \cdot \rangle$ die Gruppe aus Bsp. 272). Man bestimme die vom Element $\bar{9}$ erzeugte Untergruppe sowie deren Nebenklassen in Γ_{16}.

276) Sei $\langle \Gamma_{18}, \cdot \rangle$ die Gruppe aus Bsp. 273). Man bestimme die vom Element $\bar{7}$ erzeugte Untergruppe sowie deren Nebenklassen in Γ_{18}.

277) Sei G eine Gruppe, deren Ordnung $|G|$ eine Primzahl ist. Man zeige, daß G nur die trivialen Unterbruppen $\{e\}$ und G hat.

278–285) Untersuchen Sie, ob die folgenden Strukturen Ringe, Integritätsbereiche bzw. Körper sind:

278) $M = \{0,1\}$ mit der Addition modulo 2 und dem Produkt $a \cdot b = 0$ für alle $a, b \in M$.

279) $M = \{0,1,2\}$ mit der Addition modulo 3 und dem Produkt $a \cdot b = 1$ für alle $a, b \in M$.

280) $M = \mathbb{Q}[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ mit der Addition und Multiplikation aus $\mathbb{R}$.

281) Wie 280), jedoch $M = \mathbb{Q}[\sqrt{6}]$.

282) Wie 280), jedoch $M = \mathbb{Q}[\sqrt{7}]$.

283) Wie 280), jedoch $M = \mathbb{Q}[\sqrt{14}]$.

284) $M = \{0,1,2\}$ mit der Addition modulo 3 und der Multiplikation modulo 4.

285) $M = \{0,1\}$ mit der Addition $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=1$, und der Multiplikation modulo 2.

286) Von der Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ sei bekannt: i) $\mathbb{R} \subseteq K$, ii) $1+3i \in K$ und iii) $\langle K, +, \cdot \rangle$ ist ein Körper (mit der Addition bzw. Multiplikation aus $\mathbb{C}$). Zeigen Sie, daß $K = \mathbb{C}$ sein muß.

287) Von der Menge $K \subseteq \mathbb{C}$ sei bekannt: i) $\mathbb{R} \subseteq K$, ii) $1 - i \in K$ und iii) $\langle K, +, \cdot \rangle$ ist ein Körper (mit der Addition bzw. Multiplikation aus $\mathbb{C}$). Zeigen Sie, daß $K = \mathbb{C}$ sein muß.

288) Gibt es eine Menge K mit $\mathbb{R} \subsetneq K \subsetneq \mathbb{C}$, die mit der üblichen Addition bzw. Multiplikation einen Körper bildet? (Begründung!)

289) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring mit Einselement und $E(R)$ die Menge derjenigen Elemente in R, die bezüglich der Multiplikation ein inverses Element besitzen. Zeigen Sie, daß $E(R)$ mit der Multiplikation eine Gruppe bildet (die *Einheitengruppe* von R).

290) Man zeige, dass für eine beliebige Menge M die Algebra $\langle \mathbf{P}(M), \Delta, \cap \rangle$ ein kommutativer Ring mit Einselement ist. Für welche M ist dieser Ring sogar ein Körper?

291) Bestimmen Sie die Einheitengruppe (vgl. 289) des Restklassenringes $\mathbb{Z}_9$.

292) Man bestimme $E(\mathbb{Z}_6)$ und $E(\mathbb{Z}_3)$ und überprüfe, ob diese beiden Gruppen isomorph sind.

293–295) Beweisen Sie, daß die angegebene Identität in einem Ring R für alle $a, b \in R$ gilt ($-c$ bezeichnet das additive Inverse zu c):

293) $(-a)b = -(ab)$ **294)** $a(-b) = -(ab)$

295) $(-a)(-b) = ab$

296) Sei $\langle R, +, \cdot \rangle$ ein Ring. Man zeige, daß dann auch $R \times R$ mit den Operationen

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

ein Ring ist.

297) Seien $\langle R_1, +_1, \cdot_1 \rangle$ und $\langle R_2, +_2, \cdot_2 \rangle$ Ringe. Man zeige, daß dann auch $R_1 \times R_2$ mit den Operationen

$$(a,b) + (c,d) = (a +_1 c, b +_2 d)$$
$$(a,b) \cdot (c,d) = (a \cdot_1 c, b \cdot_2 d)$$

ein Ring ist.

298) Sei R ein Ring und $R[[z]]$ die formalen Potenzreihen $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ mit Koeffizienten $a_n \in R$. Man zeige, daß $R[[z]]$ mit den Operationen

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n + \sum_{n\geq 0} b_n z^n = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n, \quad \sum_{n\geq 0} a_n z^n \cdot \sum_{n\geq 0} b_n z^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n$$