Mathematatik III

Vorlesung 6, 10.11.2006

Markus Nemetz

November 2006

1 Vorbemerkung

Prof. Panholzer hat die illustrierenden Beispiele aus der zur VO empfohlenen Lektüre gebracht - sie sind hier nicht angeführt.

Die z.T. gerafften Zusammenstellungen sind z.T. auch die jeweiligen theoretischen Grundlagen zu den Übungsbeispielen, die in ausgearbeiteter Form jeweils nach der Übungsrunde auf *http://www.wikiserver.at/tu-mathe-inf-3/* zu finden sind.

Markus Nemetz
14.11.2006

2 L-Transformation (Forts.)

$f(t)$ ist der Zeitbereich. Es gilt:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} =: F(s) = \int_0^\infty e^{-s\cdot t} \cdot f(t)\,\partial t$$

Inverse Transformation $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

$f(t)$	$F(s)$
$e^{a\cdot t}$	$\frac{1}{s}$
$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\cos(\sin \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Beispiel:

$$e^{at} \qquad a = \alpha + i \cdot \beta$$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{a\cdot t} \cdot e^{-s\cdot t}\,\partial t = \int_0^\infty e^{(a-s)\cdot t}\partial_t = \frac{\overbrace{e^{(a-s)\cdot t}}^{\text{wenn } a-s<0 \text{ dann ok}}}{a-s}\Big|_0^\infty =$$

$$\lim_{t\to\infty} \underbrace{\frac{e^{(a-s)\cdot t}}{a-s}}_{\to 0} - \frac{1}{a-s} = \frac{1}{s-a}$$

$$\cos(\omega \cdot t), \sin(\omega \cdot t): \text{ setze } a = 0 + i \cdot \omega$$
$$e^{i\omega t} = \cos(\omega \cdot t) + i \cdot \sin(\omega \cdot t) = \ldots$$

Rechenregeln ($f(t)$, $g(t)$ - Zeitfunktion $\overbrace{\longrightarrow}^{\mathcal{L}} F(s), G(s)$)

- *Linearität*

  $$\mathcal{L}\{\alpha \cdot f(t) + \beta \cdot g(t)\} = \alpha \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} + \beta \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} = \alpha \cdot F(s) + \beta \cdot G(s)$$

  Beispiel:

  $$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$
  $$\mathcal{L}\{\cosh t\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^t\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-t}\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s-1} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+1} = \frac{s}{s^2-1}$$

  $$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \qquad \text{analog}$$

- *Streckung*

  $$\mathcal{L}\{f(c \cdot t)\} = \frac{1}{c} \cdot F(\frac{s}{c}), c > 0$$

  Beweis: Variable im Integral substituieren

- *Differentiation und Integration im Zeitbereich*

  $$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) - \underbrace{f(0^+)}_{\text{rechtsseitiger Grenzwert an der Stelle 0}}$$

  Voraussetzungen:

1. f,f' $\mathcal{L}$-transformierbar
2. f stetig auf $(0, \infty)$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s) - s^{n-1} \cdot f(0^+) - s^{n-2} \cdot f'(o^+) - \cdots - f^{n-1}(0^+)$$

Voraussetzungen für die Integration analog denen von der Differentiation:

$$\mathcal{L}\{\int_0^t f(\tau)\partial\tau\} = \frac{F(s)}{s}$$

Beispiel:

$$f(t) = t, \mathcal{L}\{t\} = ?$$

$$f'(t) = 1, \qquad \mathcal{L}\{f'(t)\} = s \cdot F(s) = \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$s \cdot F(s) - f(0^+) = s \cdot F(s)$$

$$\Rightarrow\ F(s) \cdot s = \frac{1}{s}\ \Rightarrow\ F(s) = \frac{1}{s^2}$$

Analog: $f(t) = t^n, n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f^{(n)}(t) = n(n-1)(n-2)\ldots 1 \cdot t^0 = n' \cdot t$$

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \cdot F(s)$$

$$\mathcal{L}\{f^{(k)}(t)\} = n' \cdot \mathcal{L}\{1\} = n' \cdot \frac{1}{s}$$

$$\Rightarrow F(s) = \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n'}{s^{n+1}}$$

Weitere wichtige Eigenschaften:

- *Differentiation und Integration im Zeitbereich*

$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = -\frac{\partial}{\partial s}F(s) = -F'(s)$$

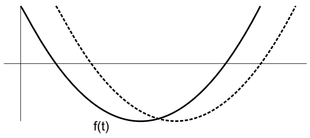
$$\mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} = (-1)^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial s^n}F(s) = (-1)^n \cdot F^{(n)}(s)$$

$$\mathcal{L}\{\frac{\mathbf{f(t)}}{\mathbf{t}}\} = \int_{\mathbf{s}}^{\infty} \mathbf{F(u)} \cdot \partial\mathbf{u}$$

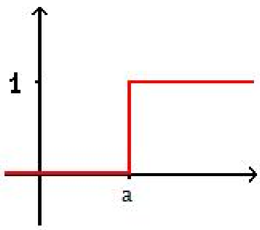
Beispiel:

$$\mathcal{L}\{t \cdot \sin(\omega t)\} = -\frac{\partial}{\partial s} \cdot F(s) = -\frac{\partial}{\partial s} \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{2s}{(s^2 - \omega^2)^2}$$

- *Dämpfung und Verschiebung*

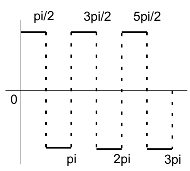


$$\mathcal{L}\{e^{-\mathbf{at}} \cdot f(t)\} = F(s+a), \qquad f(t) : [0, \infty] \to \mathbb{R}, a > 0$$
$$\mathcal{L}\{f(t-a) \cdot u(t-a)\} = e^{-as} \cdot F(s)$$
$$u(t) \text{ ... Heavisidische Sprungfunktion}$$



$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$
$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = e^{-as} \cdot \frac{1}{s}$$

Beispiel: $\mathcal{L}$-Transformation der Rechteckperiode T, Amplitiude A ($T, A > 0$):



$$f(t) = [2A \sum_k = 0^\infty (-1)^k u(t - \frac{nT}{2})] - A$$

Für jedes t ist die Reihe nur eine endliche Reihe - $0 \leq t < \frac{T}{2}$, nur $n = 0$ liefert:

$$f(t) = 2A \cdot \underbrace{(-1)^0}_{=1} \cdot \underbrace{u(t)}_{=1} - A = 2A - A = A$$

$\frac{T}{2} \leq t < T : n = 0$ und $n = 1$ liefert:

$$f(t) = 2A \cdot \underbrace{(-1)^0}_{=1} \cdot \underbrace{u(t)}_{=1} + 2A(-1)^1 \cdot u(t - \frac{T}{2}) - A = 2A - 2A - A = -A$$

$$\mathcal{L}\{f(t) =\} = 2A\mathcal{L}\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \cdot u(t - \frac{nT}{2})\} - A \cdot \mathcal{L}\{1\} =$$
$$2A \int_0^{\infty} e^{-st} \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u(t - \frac{nT}{2})\partial t - \frac{A}{s} =$$
$$2A \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-st}(-1)^n u(t - \frac{nT}{2})\partial t - \frac{A}{s} =$$
$$2A \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st}(-1)^n u(t - \frac{nT}{2})\partial t - \frac{A}{s} \blacksquare$$

$\blacksquare$ Darf man hier machen, ist aber i.A. *nicht*erlaubt!

- *Gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen* Definition: Eine Funktionenfolge $f_0(x), f_1(x), \ldots$ heisst auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gleichmässig konvergent gegen eine Funktion $f(x)$, wenn $\forall \epsilon > 0$ ein von x unabhängiger Index $N = N_\epsilon > 0$ existiert, sodass

  $$n \geq N : |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon, \forall x \in I$$

  Satz: Wenn $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmässig auf I gegen $f(x)$ konvergiert, dann gilt:

  $$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f(n)\, \partial x = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f(n)\, \partial x = \int_a^b f(n)\, \partial x$$

  Betrachten Reihe:

  $$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \partial x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b f_k(x) \partial x$$

Integration und Summation einer Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}$ dürfen vertauscht werden, wenn die Folge der Partialsummen

$$s(n)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

gleichmässig gegen

$$s(n)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$$

konvergiert.

- *Weierstrass'scher M-Test* Für gleichmässige Konvergenz von Funktionenreihen $\sum_{n=0}^{\infty} f_k(x)$: Wenn für jede Funktion $f_k(x)$ ein Wert $M \geq 0$ angegeben werden kann, sodass

$$|f_k(x)| \leq M_k \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

und $\sum_{n=0}^{\infty} M_k < \infty$, dann folgt daraus: Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_k(x)$ konvergiert gleichmässig auf I.

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = 2A \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-st} \cdot (-1)^n \cdot u(t - \frac{n \cdot T}{2}) \partial t - \frac{A}{s} = \blacksquare$$

$\int$ und $\sum$ sind wegen gleichmässiger Konvergenz vertauschbar.

$$f_k(t) = e^{-st} \cdot (-1)^k \cdot u(t - \frac{k \cdot T}{2})$$

$$|f_k(t)| = |\underbrace{e^{-st}}_{s>0}| \cdot (-1)^k \cdot u(\underbrace{t - \frac{k \cdot T}{2}}_{\text{Sprungfunktion}}) \leq |e^{-s \cdot \frac{k \cdot T}{2}}| = e^{-s \cdot \frac{k \cdot T}{2}} = M_k$$

$$t = \frac{K \cdot t}{2}, \qquad 0 \leq t < \frac{K \cdot T}{2} \Rightarrow u(t - \frac{K \cdot T}{2}) = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} M_k = \sum_{n=0}^{\infty} (e^{\frac{-st}{2}})^k = \frac{1}{1 - e^{\frac{-st}{2}}} < \infty, s > 0 \checkmark$$

Fortsetzung bei ■:

$$2A\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-st}(-1)^k - u(t-\frac{kT}{2})\partial t - \frac{A}{s} =$$
$$2A\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k - \mathcal{L}\{u(t-\frac{kT}{2})\} - \frac{A}{s} =$$
$$2A\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^k - e^{-\frac{Ts}{2}} - \frac{1}{s} - \frac{A}{s} =$$
$$\frac{2A}{s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{Ts}{2}} - \frac{A}{s} = \frac{2A}{s}\frac{1}{1+e-\frac{Ts}{2}} - \frac{A}{s}$$
$$\frac{A}{s}\cdot(\frac{2}{1+e-\frac{Ts}{2}} - 1) = \frac{A}{s}\cdot\frac{1-e-\frac{Ts}{2}}{1+e-\frac{Ts}{2}} = \frac{A}{s}\tanh(\frac{sT}{k})$$

- *Faltung*

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)\cdot g(t-\tau)\partial\tau$$
$$\mathcal{L}\{(f*g)(t)\} = F(s)\cdot G(s)$$

- *Umkehrformel* Gegegben $F(s)$ - gültig falls $F(\delta)$ existiert

$$\underbrace{\frac{f(t^+)+f(t^-)}{2}}_{=f(t)\text{ falls stetig}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{(\delta+i\omega)\cdot t}\cdot F(\delta+i\omega)\partial\omega$$