(1) [6 Punkte] Man bestimme mit Hilfe einer in der Vorlesung kennengelernten kombinatorischen Methode (kein "Herumprobieren") die Anzahl aller Anordnungen (Permutationen) der Buchstaben a, b, c, d, e, in denen weder der Block "abc", noch der Block "bcd", noch der Block "cde" vorkommt.

Lösung: Sei M die Menge aller Permutationen der Menge $\{a, b, c, d, e\}$, dann ist $|M| = 5! = 120$. Sei weiters A die Menge aller Permutationen aus M, welche den Block abc enthalten, B die Menge aller Permutationen aus M, welche den Block bcd enthalten, und C die Menge aller Permutationen aus M, welche den Block cde enthalten.

Dann gilt für die gesuchte Anzahl n offenbar:

$$n = |M \setminus (A \cup B \cup C)| = |M| - |A \cup B \cup C|.$$

Zur Bestimmung von $|A \cup B \cup C|$ verwenden wir das Inklusions-Exklusions-Prinzip:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Zur Bestimmung der einzelnen Mächtigkeiten beachten wir:
Die Elemente von A entsprechen den Permutationen der 3-elementigen Menge $\{abc, d, e\}$, und analog entsprechen die Elemente von B bzw. C den Permutationen von $\{a, bcd, e\}$ bzw. $\{a, b, cde\}$.
Weiters entsprechen die Elemente von $A \cap B$ bzw. $B \cap C$ den Permutationen von $\{abcd, e\}$ bzw. $\{a, bcde\}$, und schließlich ist $A \cap C = A \cap B \cap C$ die 1-elementige Menge $\{abcde\}$.
Somit ist $|A| = |B| = |C| = 3! = 6$, $|A \cap B| = |B \cap C| = 2! = 2$ und $|A \cap C| = |A \cap B \cap C| = 1$.
Damit liefert das Inklusions-Exklusions-Prinzip:

$$|A \cup B \cup C| = 6 + 6 + 6 - 2 - 1 - 2 + 1 = 19 - 5 = 14,$$

und die gesuchte Anzahl ist

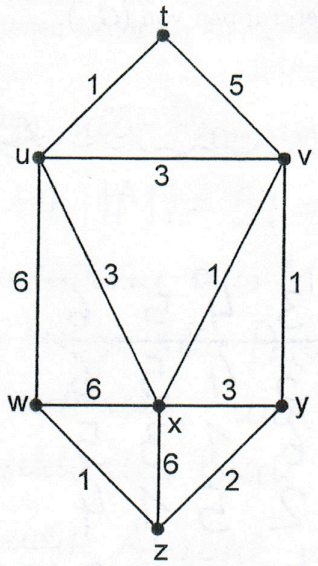
$$\underline{\underline{n}} = |M| - |A \cup B \cup C| = 120 - 14 = \underline{\underline{106}}$$

Zur Probe bestimmen wir $|A \cup B \cup C|$ durch Auflisten der Elemente von A, B, C und Streichen der doppelt vorkommenden Elemente.

Menge A	Menge B	Menge C
abcde	~~abcde~~	~~abcde~~
abced	aebcd	acdeb
dabce	bcdae	bacde
deabc	bcdea	~~bcdea~~
eabcd	~~eabcd~~	cdeab
edabc	ebcda	cdeba

Also werden 4 der 18 Elemente gestrichen, und es ergibt sich wieder $|A \cup B \cup C| = 14$.

(2) [7 Punkte] Gegeben sei der folgende ungerichtete kantenbewertete Graph G:

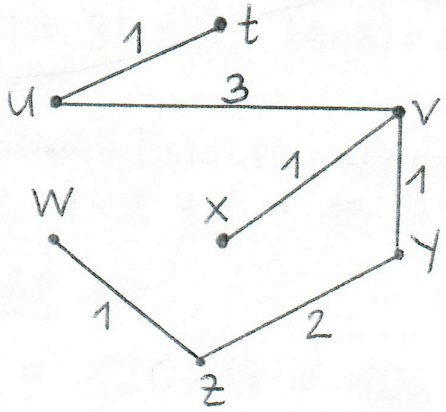


Man bestimme für G mit dem Algorithmus von Dijkstra die kürzesten Wege und ihre Längen von allen Knoten zum Knoten z. Geben Sie dabei bitte unbedingt die Ergebnisse der Iterationsschritte des Dijkstra-Algorithmus in einer Tabelle an.

Lösung: Der Dijkstra-Algorithmus liefert folgende Tabelle:

z	y	x	w	v	u	t	Auswahl	Vorgänger
$\boxed{0}$	∞	∞	∞	∞	∞	∞	z	—
	2	6	$\boxed{1}$	∞	∞	∞	w	z
	$\boxed{2}$	6		∞	7	∞	y	z
		5		$\boxed{3}$	7	∞	v	y
		$\boxed{4}$			6	8	x	v
					$\boxed{6}$	8	u	v
						$\boxed{7}$	t	u

Aus der Tabelle ergibt sich der „Entfernungsbaum":



Aus diesem liest man (ebenso wie aus der Tabelle) die kürzesten Wege (und Längen) von allen Knoten zum Knoten z ab.

(3) [7 Punkte] Gegeben sei die Gruppe $(G, \cdot)$, mit $G = \mathbb{Z}_7 \setminus \{\bar{0}\}$, also die Gruppe der von $\bar{0}$ verschiedenen Restklassen modulo 7 zusammen mit der Multiplikation.

(a) Man gebe die Operationstafel der Gruppe $(G, \cdot)$ an.

(b) Man bestimme alle Untergruppen von $(G, \cdot)$.

Lösung:

(a)

$\cdot$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

(b)

$\{1\} = \langle 1 \rangle$

$\{1, 6\} = \langle 6 \rangle$

$\{1, 2, 4\} = \langle 2 \rangle = \langle 4 \rangle$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \langle 3 \rangle = \langle 5 \rangle$