1. Beginn VO am 09.10.2009

9.4 Numerische Integration

Aufgabe: $\int_a^b f(x)\,dx = ?$

Lösung: wenn $F(x)$ Stammfunktion von $f(x)$ in $[a,b]$ ist, d.h. $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a,b)$

bzw. $\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Problem:

- oft kann $F(x)$ nicht explizit bestimmt werden, weil $f(x)$ keine elementare Funktion ist.

  Bsp.: $f(x) = e^{-x^2/2}, \quad \frac{\sin(x)}{x}$

- oft ist $f(x)$ nicht als gesammte Funktion gegeben, ~~oder~~ sondern man kennt $f(x)$ nur an einigen Stellen.

Idee: Ersetzen von $f(x)$ an $[a,b]$ durch eine Ersatzfunktion $p(x)$: hier wird $p(x)$ immer (stückchenweise) ein Polynom sein.

$p(x)$ ... Approx.
$r(x)$ ... Fehler

$$f(x) = p(x) + r(x) \Rightarrow$$

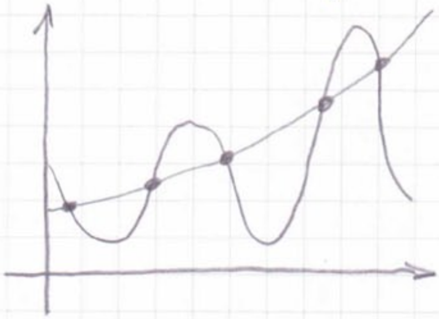
$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^b p(x)\,dx}_{Q(a,b)} + \underbrace{\int_a^b r(x)\,dx}_{R(a,b)}$$

$Q(a,b)$: Quadraturformel; liefert eine Approximation von $\int_a^b f(x)\,dx$

$R(a,b)$: Restglied von $Q(a,b)$; beschreibt den dabei gemachten Fehler

$p(x)$ z. B.: durch Interpolation finden:

wenn Grad des Int. Polynoms "groß" ist; dann treten störende Schwingungen auf und es ist sehr rechenaufwändig.



-> als Näherungsfunktion $p(x)$ nicht gut geeignet. Man verwendet nur Polynome mit Grad ≤ 3 und teilt das Intervall in kleine Teilintervalle, man kann so erreichen dass $R(a,b)$ gegen 0 strebt.

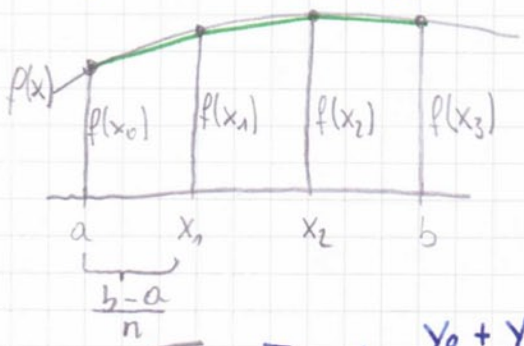
1. Sehnentrapezformel

teilt $[a,b]$ in gleich lange Teilintervalle n;

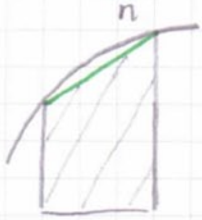
Schrittweite $h = \frac{b-a}{n}$

Teilungspunkt $x_i = a + ih$, $i = 0, 1 \ldots n$

interpoliert $[x_i, x_{i+1}]$ linear



$y_i = f(x_i)$



$$F = h \cdot \frac{y_0 + y_1}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + h \cdot \frac{y_1 + y_2}{2} \ldots h \cdot \frac{y_{n-1} + y_n}{2}$$

$$= \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + \ldots 2y_{n-1} + y_n)$$

$$\boxed{Q^{ST}(a,b) = \frac{b-a}{2n}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)}$$

Verfahrensfehler: ist f 2mal stetig differenzierbar

$$R^{ST}(a,b) = -\frac{b-a}{12} h^2 f''(\xi) \quad , \quad \xi \in [a,b]$$

Psi

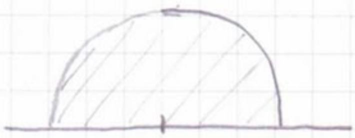
$$= O(h^2)$$

$$\int_a^b = Q^{ST}(a,b) + R^{ST}(a,b)$$

für f konkav

$$R^{ST}(a,b) = \int_a^b - Q^{ST}(a,b) \geqslant 0$$

Bsp.: $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}$



ST mit n = 4

x_i	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
y_i	0	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	1	$\sqrt{\frac{3}{2}}$	0

$$y = +\sqrt{1-x^2} \quad |^2$$
$$y^2 = 1 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 1$$

$$Q^{ST}_{0,5}(-1,1) = \frac{1}{4}\left(0 + 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cdot 1 + 2\frac{\sqrt{3}}{2} + 0\right) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$$

$$= 1,37$$

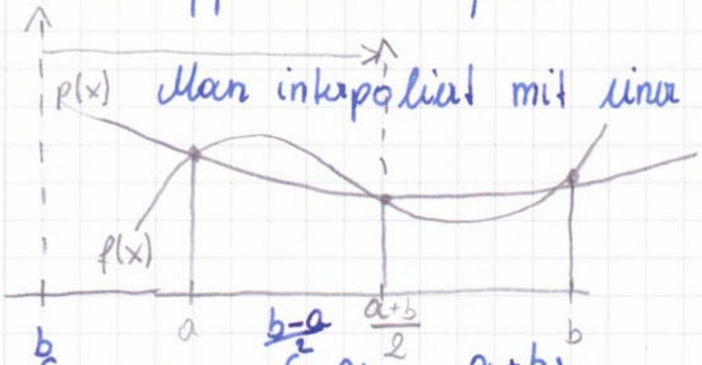
$$Q^{ST}_{0,25}(-1,1) = 1,5$$

$$R^{ST}_{0,5}(-1,1) = \sim 0,2 \quad ; \quad R^{ST}_{0,25}(-1,1) = \sim 0,07$$

für $h = 0,01$, $n = 200$ wäre $Q^{ST}(-1,1) = 1,57$

$\Rightarrow$ Fehler immer kleiner

2. Kepplersche Fassformel



Man interpoliert mit einer quadrat. Polynomfkt.

$$h = \frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} f\left(x + \frac{a+b}{2}\right) dx = \int_{-h}^{h} q(x)\,dx$$

Stützstellen

$$(-h, f(a)),\ \left(0, f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right),\ (h, f(b))$$

Interpolationspolynom nach Lagrange

$$p(x) = y_0 \cdot \frac{x(x-h)}{2h^2} + y_1 \frac{(x+h)(x-h)}{-h^2} + y_2 \cdot \frac{(x+h)x}{2h^2} =$$

$$\frac{y_0}{2h^2}\left(x \cdot (x-h)\right) - \frac{y_1}{h^2}(x+h)(x-h) + \frac{y_2}{2h^2}(x+h)x$$

$$\int_{-h}^{h} p(x)\,dx = \frac{y_0}{2h^2}\int_{-h}^{h} x(x-h)\,dx - \frac{y_1}{h^2}\int_{-h}^{h}(x+h)(x-h) + \dots$$

$$= \frac{y_0}{2h^2}\left(\frac{x^3}{3} - \cancel{h\frac{x^2}{2}}\right)\Bigg|_{-h}^{h} - \frac{y_1}{h^2}\left(\frac{x^3}{3} - h^2 x\right)\Bigg|_{-h}^{h} + \frac{y_2}{2h^2}\left(\frac{x^3}{3} + \cancel{h\frac{x^2}{2}}\right)\Bigg|_{-h}^{h}$$

$$= \frac{y_0}{2h^2} \cdot \frac{2h^3}{3} - \frac{y_1}{h^2} \cdot \left(\frac{2}{3}h^3 - 2h^3\right) + \frac{y_2}{2h^2}\,\frac{2h^3}{3}$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

$$\boxed{Q(a,b) = \frac{b-a}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)}$$

3. Simpson'sche Regel

Kepplersche Fassregel auf Teilintervallen angewandt.

$[a, b]$ teilt in $2n$ gleichgroße Teilintervalle

$h = \frac{b-a}{2n}$; jeweils auf $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ wird Keppler'sche Fassregel angew.

$x_i = a + ih$

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) \approx \frac{h}{3}\left(f(x_{2i-2}) + 4(f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left((y_0 + 4y_1 + y_2) + (y_2 + 4y_3 + y_4) + \dots\right.$$

$$= \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 \dots + 4y_{2n-1} + y_{2n}\right)$$

$$Q^{SI}(a, b) = \frac{b-a}{6n}\left(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) \dots f(x_{2n})\right)$$

Verfahrensfehler

$$R^{SI}(a, b) = -\frac{b-a}{180} \cdot h^4 f^{[4]}(\xi) \qquad \xi \in (a, b)$$

1) $R^{SI}(a, b) = O(h^4)$

2) $f(x)$ ist Polynom Grad $\leq 3 \Rightarrow f^{[4]}(x) = 0 \quad \forall x$

$\Rightarrow R^{SI}(a, b) = 0$

Bsp: $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} = 1,57$

$n \cancel{5} = 2 \;\hat{=}\; h = 0,5$

$Q^{SI}_{0,5}(-1,1) = \frac{2}{12}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + y_4) = 1,49$

$R^{SI}_{0,5}(-1,1) = 0,08$

$n = 4 \;\hat{=}\; h = 0,25$

$Q^{SI}_{0,25}(-1,1) = 1,54$, $R^{SI}_{0,25}(-1,1) = \overset{0,03}{\cancel{1,54}}$

h	ST	SI	exakt
0,5	1,37	1,49	1,57
0,25	1,50	1,54	1,57

2. Beginn VO am 16.10.2009

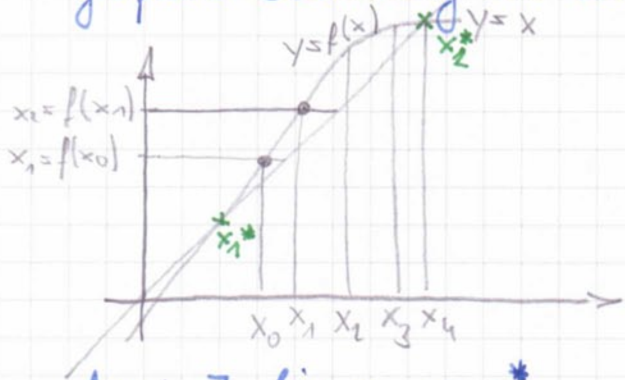
Qualitative Theorie der Differenzen-, und Differentialgleichungen
(Buch 7.2.3)

explizite Dg 1. Ordnung: $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0, 1, 2$

f... reelle Funktion, nicht von der Variable abhängig (autonome DFG)

VS: f stetig differenzierbar

grafische Darstellung der Lösungsfolge x_n



sei $(x_1 \dots x_2 \dots)$ Lösungsfolge für $x_{n+1} = f(x_n)$

Ann: $\exists \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$

$$\Rightarrow f(x^*) = f\left(\lim_{n\to\infty}(x_n)\right) \overset{f \text{ stetig}}{=} \lim_{n\to\infty}\left(f(x_n)\right)$$

$$= \cancel{f(x_{n+1})} \lim (x_{n+1}) = x^*$$

d.h.: x^* ist Fixpunkt von f : $f(x^*) = x^*$
= Schnittpunkt von $f(x)$ mit $y = x$

umgekehrt gilt: wenn $x^* \in \mathbb{R}$ mit $f(x^*) = x^*$ und $x_0 = x^*$
$\Rightarrow x_1 = f(x_0) = f(x^*) = x^* \Rightarrow$ Lösungsfolge $(x^*, x^* \dots)$

x^* mit $f(x^*) = x^*$ heißt auch Gleichgewichtspunkt von $x_{n+1} = f(x_n)$

Frage:

- hat DFG GGP
- wenn ja: gegen welchen GGP konvergiert Lösungsfolge (abhängig vom Startwert x_0)
- wie verhalten sich Lösungen die in der Nähe eines GGP starten?

Def: GGP x^* heißt stabil $\Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : |x_0 - x_0^*| < \delta \Rightarrow |x_n - x^*| < \varepsilon \; \forall n \geq 0$

x^* heißt asymptotisch stabil $\Leftrightarrow$

x^* stabil $\wedge$ $\exists \delta > 0 : |x_0 - x^*| < \delta \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$

x^* heißt instabil $\Leftrightarrow$ x^* nicht stabil

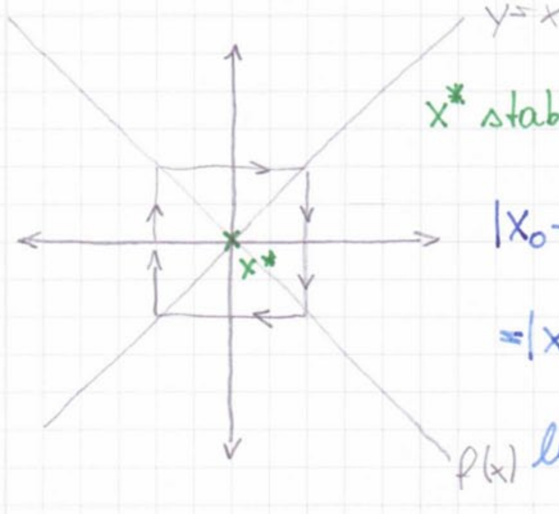
$\exists \varepsilon > 0 \; \forall \delta > 0 : |x_0 - x^*| < \delta \wedge \exists n \in \mathbb{N} : |x_n - x^*| \geq \varepsilon$

$x_0 \neq x^*$

zu Skizze: x_1^* instabil, x_2^* asymptotisch stabil

Bsp.: $f(x) = -x$, $x_{n+1} = -x_n$

GGP: $f(x) = x \Rightarrow -x = x \Rightarrow x = 0$



x^* stabil, aber nicht asymptotisch

$|x_0 - \underbrace{x^*}_{=0}| < \delta \Rightarrow |x_n - x^*| = |x_n| = |(-1)^n x_0|$

$= |x_0| < \delta \quad (\delta = \varepsilon)$

$\lim (\underbrace{x_n}_{(-1)^n x_0}) = x^* = 0$, $x_0 \neq 0$

Satz: DFG $x_{n+1} = f(x_n)$, GGP x^*

1, wenn $|f'(x^*)| < 1 \Rightarrow x^*$ asymptotisch stabil

2, wenn $|f'(x^*)| > 1 \Rightarrow x^*$ instabil

3, $f'(x^*) = 1$ oder $-1 \Rightarrow x^*$ stabil

Beweis: ad 1)

$|f'(x^*)| < 1$, weil $f'(x^*)$ stetig $\Rightarrow$

$\exists \delta > 0$ $\forall x$ mit $|x - x^*| < \delta$: $|f'(x)| \leq \lambda < 1$
$\exists \lambda < 1$

$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| \underset{\uparrow}{=} |f'(\xi)\cdot(x_n - x^*)| \leq \lambda |x_n - x^*|$

MWS der Diff.

ξ liegt zwischen x^* und x_n

VS: $x_n \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$

$\Rightarrow \xi \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$

also: $x_n \in (x^* - \delta, x^* + \delta) \Rightarrow x_{n+1} \in (x^* - \delta, x^* + \delta)$

Argument iterieren: $|x_n - x^*| \leq \lambda |x_{n+1} - x^*| \leq$

$\lambda^2 |x_{n+2} - \delta| \dots \leq \lambda^n |x_0 - x^*|$

$\overset{\lim}{\Rightarrow} \lim\limits_{n \to \infty} |x_n - x^*| \leq \lim\limits_{n \to \infty} (\lambda^n |x_0 - x^*| = 0$

$\Rightarrow \lim |x_n - x^*| = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$

d. h.: x^* ist asymptotisch stabil

Bsp.: Babylonisches Wurzelziehen

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad a > 0$$

$g(x) = x^2 - a \Rightarrow a$ ist NST von x

Newtonverfahren: $x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(2x_n - x_n - \frac{a}{x_n}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

$x_{n+1} = f(x), \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{a}{x}\right)$

GGP

$$f(x) = x \Rightarrow \frac{1}{2}\left(x - \frac{a}{x}\right) = x$$

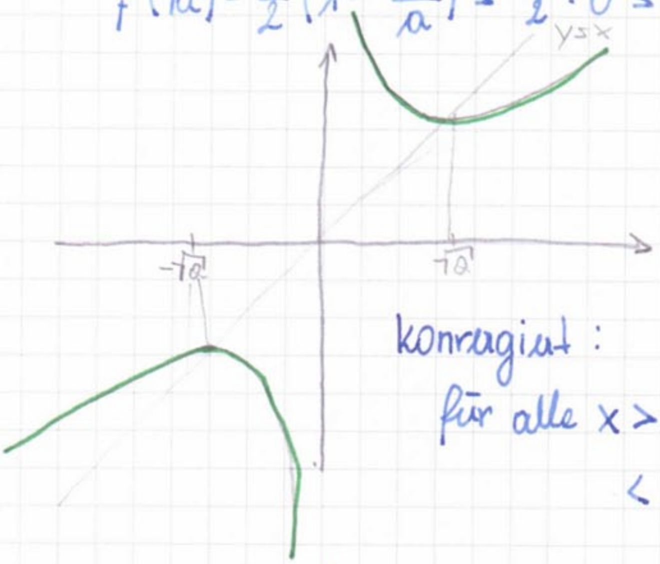
$$2x^2 = (x^2 - a)$$

$$x^2 = a$$

$$x_1^* = +\sqrt{a}, \quad x_2^* = -\sqrt{a}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$

$f'(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \Rightarrow \pm\sqrt{a}$ asymptotisch stabil



konvergiert:

für alle $x > 0$ gegen $\sqrt{a}$

< 0 $\quad -\sqrt{a}$

$x > 0$: $f(x)$ hat $x_1^* = \sqrt{a}$ abs. Minimum

- $0 < x_0 < \sqrt{a} \Rightarrow x_1 > \sqrt{a}$, ab dann: $x_{n+1} < x_n$
- $x_0 > \sqrt{a} \Rightarrow x_{n+1} < x_n$, $\lim x_n = \sqrt{a}$

Bsp.: $x_{n+1} = 2{,}5\,x_n - 0{,}01\,x_n^2$, $f(x) = 2{,}5x - 0{,}01x^2 = x$

... logistisches Wachstum (diskret)

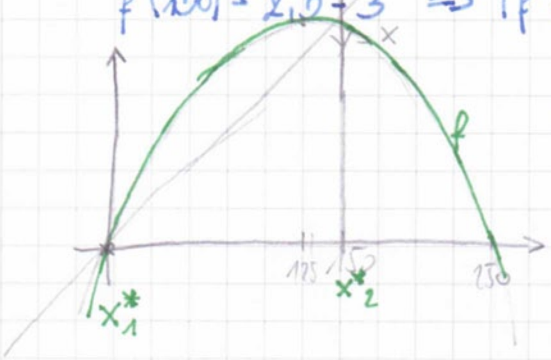
$\Rightarrow 0{,}01x^2 - 1{,}5x = 0$

$x(0{,}01x - 1{,}5) = 0 \Rightarrow x_1^* = 0$, $x_2^* = 150$

$f'(x) = 2{,}5 - 0{,}02x$

$f'(0) = 2{,}5 \Rightarrow$ instabil

$f'(150) = 2{,}5 - 3 \Rightarrow |f'(150)| < 1 \Rightarrow$ asymptotisch stabil



$x_{n+1} - x_1 = 1{,}5\,x_n - 0{,}01\,x_n^2 = \underbrace{1{,}5\,x_n}_{r\ldots\text{ Wachstumsrate}}\left(1 - \frac{x_n}{150}\right)$

Sättigungsmenge

Differentialgleichungen (DG)

Trennung der Variablen

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y)$$

$\uparrow$ Annahme

1) Wenn $\exists\, y_0 : g(y_0) = 0$, $y(x) = y_0$ ist konstante Lösung

2) $y(x) \neq y_0$ NST von $g(y)$:

$$y'(x) = f(x) \cdot g(y) \quad | : g(y) \neq 0$$

$$\frac{y'(x)}{g(y)} = f(x) \quad \Big| \int dx$$

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\, dx = \int f(x)\, dx \qquad \text{subst} \begin{cases} y = y(x), & \frac{dy}{dx} = y'(x) \\ dy = y'(x)\, dx \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx \qquad G(y) = \int \frac{dy}{g(y)}$$

$\underline{G(y) = \int f(x)\, dx}$ ... implizite Lösung

$\hookrightarrow y = \dots$ ... explizite Lösung

Bsp.: $y' = -\frac{x}{y} = -\overset{f}{x} \cdot \overset{g}{\frac{1}{y}}$; $g(y) \neq 0$

$$y \cdot y' = -x$$

$$\int y \frac{dy}{dx} = \int -x$$

$$\int y\, dy = \int -x\, dx$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + \frac{c_1}{2} \quad | \cdot 2$$

$$x^2 + y^2 = c_1 = c_2^2 \quad \Rightarrow \text{Kreis } [M(0,0),\ r = c_2]$$

$$y = \pm\sqrt{c_2^2 - x^2}$$

3. Beginn VO am 23.10.2009

$y' = f(x,y) = g(x)h(y)$

Bsp.: $N'(t) = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right)$

r ... Wachstumsrate

K ... Sättigungskonstante

(kontinuierliches) logistisches Wachstum

$N'(t) \approx N(t+1) - N(t)$

$N' = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right) \quad \Big| : N\left(1 - \frac{N}{K}\right)$

$\frac{N'}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = r \Rightarrow \int \frac{dN}{N\left(1 - \frac{N}{K}\right)} = \int r\,dt$

$\int \frac{K\,dN}{N(K-N)} = rt + \ln(C)$

Partialbruchzerlegung: $\frac{K}{N(K-N)} = \frac{A}{N} + \frac{B}{K-N}$

$= \frac{1}{N} + \frac{1}{K-N}$

$\int \frac{1}{N}\,dn + \int \frac{1}{K-N}\,dn = rt + \ln(c)$

$\ln|N| + \ln|K-N| = rt + \ln(c)$

$\ln\left|\frac{N}{K-N}\right| = rt + \ln(c)$

$\left|\frac{N}{K-N}\right| = e^{rt} \cdot c$

$\frac{N}{K-N} = \underbrace{\pm c}_{c_1} e^{rt} \qquad c_1 \in \mathbb{R}$

$N = Kc_1e^{rt} - Nc_1e^{rt}$

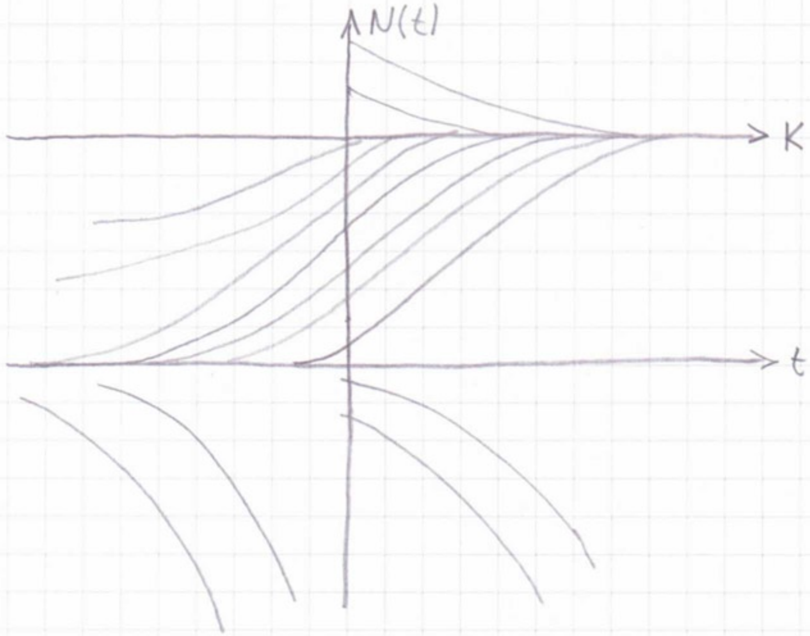
$N(1 + c_1e^{rt}) = Kc_1e^{rt}$

$N(t) = \frac{Kc_1e^{rt}}{1 + c_1e^{rt}} \qquad \Big| : c_1e^{rt}$

$N(t) = \frac{K}{\underbrace{\frac{1}{c_1}}_{c_2} e^{-rt} + 1} = \frac{K}{1 + c_2e^{-rt}}, \quad c_2 \in \mathbb{R}$

$$N \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right) = 0 \iff N = 0 \lor N = K$$

... zwei konstante Lösungen



Qualitative Theorie der DG

$y'(x) = f(y)$ ... autonome DG
(x tritt rechts nicht auf)

Bsp.: $y' = ry(1-y)$ [log. Wachstum $y = N$, $K = 1$]

oft ist $y' = f(y)$ nicht exakt / explizit lösbar

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dx$$
$$F(y) = x + C$$?

Stabilität:
- Gleichgewichtspunkte (GGP) von $y' = f(y)$
- Verhalten der Lösung für Startwerte in der Nähe von GGP
- globales Verhalten (beliebiger Startwert), bzw. Langzeitverhalten $(x \to \infty)$

Def: $y^* \in \mathbb{R}$ heißt GGP für $y' = f(y) \Leftrightarrow y^*$ ist konstante Lösung
$\Rightarrow f(y^*) = 0$

Bsp.: $y' = \underbrace{ry(1-y)}_{f(y)}$: $ry(1-y) = 0$ $(r>0)$ $y_1^* = 0$, $y_2^* = 1$

Stabilität von GGP für DG ganz analog wie für DFG
- y^* stabil $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : |y(x_0) - y^*| < \delta$ für $x_0 \in \mathbb{R}$
$|y(x) - y^*| < \varepsilon \;\forall x > x_0$

- y^* asymptotisch stabil : y^* stabil $\wedge \lim_{x \to \infty} y(x) = y^*$
- y^* instabil : y^* nicht stabil

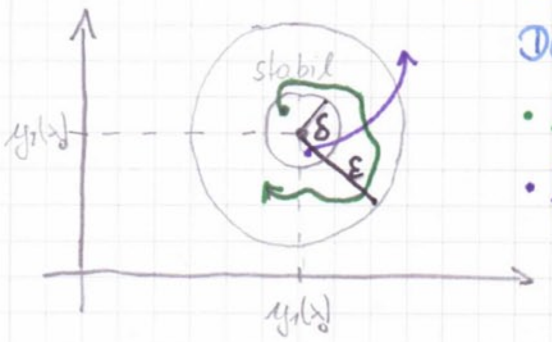
Veranschaulichung für $y(x) \mathrel{\hat=} \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$:

$$\left.\begin{aligned} y_1'(x) &= f_1(y_1(x), y_2(x)) \\ y_2'(x) &= f_2(y_1(x), y_2(x)) \end{aligned}\right\} \text{System zweier autonomer DG}$$

$$\vec{y}'(x) = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = \vec{f}(\vec{y})$$

autonome DG:

$$= \begin{pmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{pmatrix}$$



- $\vec{y}(x)$ $[f_1(x)]$ stabil
- $\vec{y}_2(x)$ $[f_2(x)]$ instabil

Satz: y^* GGP von $y' = f(y)$, f stetig diff.

1) wenn $f'(y^*) < 0 \Rightarrow y^*$ asyptotisch stabil

2) wenn $f'(y^*) > 0 \Rightarrow y^*$ instabil

Beweisidee: man entwickelt $f(y)$ bei $y = y^*$ nach Taylor:

$$f(y) = f(y^*) + f'(y^*)(y - y^*) + \dots$$

$$f(y) = f'(\tilde{y})(y - \tilde{y}) \quad , \quad \tilde{y} \in (y, y^*)$$

wenn bei 1 $f'(y^*) < 0$

$$\Rightarrow f'(\tilde{y}) = \alpha < 0$$

$$y' = f(y) = \underbrace{f(y^*)}_{=0} + f'(\tilde{y})(y - y^*) = \underbrace{\alpha}_{<0}(y - y^*)$$

$y > y^* \Rightarrow y' = \alpha(y - y^*) < 0 \Rightarrow y$ streng monoton fallend

$y < y^* \Rightarrow y' = \alpha(y - y^*) > 0 \Rightarrow y$ – " – steigend

Bsp: $y' = ry(1-y)$ $\quad y_1^* = 0, \quad y_2^* = 1$

$f(y) = ry(1-y) = ry - ry^2 \Rightarrow f'(y) = r - 2ry$

$f'(0) = r > 0 \Rightarrow y_1^* = 0$ ist instabil

$f'(1) = r - 2r = -r < 0 \Rightarrow y_2^*$ ist asymtotisch stabil

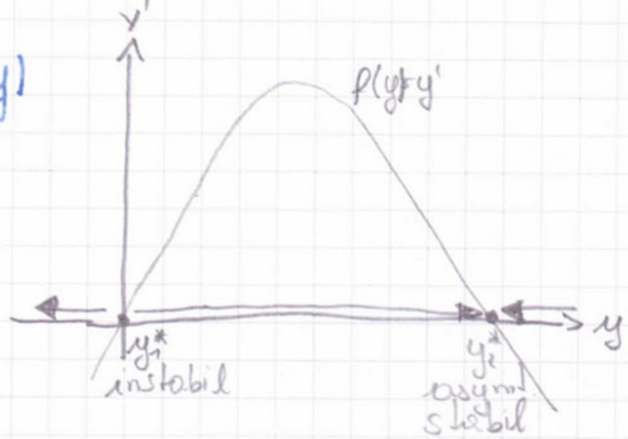
<u>Globales Verhalten / Langzeitverhalten</u>

oft sehr gut in Phasenebene skalierbar (y, y')

$y' = f(y)$: $y' = f(y) > 0 \Rightarrow y \nearrow$

$< 0 \Rightarrow y \searrow$

Bsp.: $y' = ry(1-y)$



Simulation von DG (Kapitel 9.5)

numerische Verfahren ~~de~~ zur Lösung von Anfangswert-~~bedingungen~~problemen gewöhnlicher DG erster Ordnung

$$\boxed{y'(x) = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0}$$

Bemerkung: DG höherer Ordnung können als Systeme von DG erster Ordnung aufgefasst werden.

Bsp: $y''(x) = f(x, y, y')$

$$\left.\begin{aligned} y_1(x) &= y(x) \\ y_2(x) &= y'(x) \end{aligned}\right\} \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}\,'(x) = \begin{pmatrix} y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2(x) \\ f(x, y, y_2) \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} y_1'(x) &= y_2(x) \\ y_2'(x) &= f(x, y, y_2) \end{aligned}\right\} \text{System von DG erster Ordnung}$$

Methoden funktionieren auch für Systeme

Numerische Lösung:

$y' = f(x,y) \quad , \quad y(x_0) = y_0 \qquad (1)$

Annahme $\exists 1$ Lösung (1) — Anm: Satz von Existenz-, und Eindeutigkeit von Lösungen (7.3.1)

unter numerischer Lösung versteht man:

$a = x_0 \quad x_1 \quad \dots \quad x_n = b$

suchen $y_i \approx y(x_i) \quad i: 1 \dots n$

$x_i = x_0 + i \cdot h \quad , \quad h = \frac{b-a}{n}$ ... Schrittweite

$$y(x) = \int y'(x)\,dx \overset{\text{Haupt-}}{\underset{\text{satz}}{\Rightarrow}} y(x_0+h) - y(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} y'(x)\,dx$$

$$= \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))\,dx$$

$$\Rightarrow \boxed{y(x_0+h) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))\,dx}$$

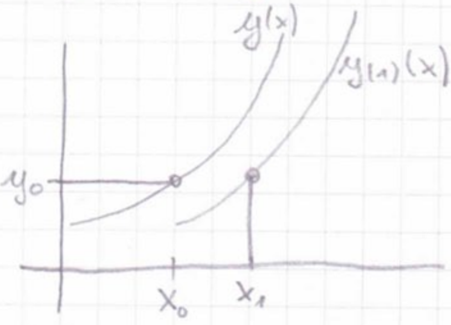
<u>Allgemeine Strategie:</u> dieses Integral durch eine Quadraturformel annähern (approximieren)

$y(x_0+h) = y(x_1) \approx y_1$ ... erhalten durch Anwenden der Quadraturformel

dann betrachten wir AWA $y_1'(x) = f(x, y)$, $y(x_1) = y_1$
approx Integral oben mit gleicher Methode

↳ exakte Lösung $y_{(1)}(x)$ $\approx y(x)$

↳ exakte Lösung zu AWA $y' = f(x, y)$, $y_0 = f(x_0)$



$$y_2 \approx y_{(1)}(x_1+h) = y_{(1)}(x_0+2h)$$
$$= y_{(1)}(x_2) \approx y(x_2)$$

Beschriebene Strategie ist ein Einschrittverfahren.
Bei Mehrschrittverfahren gehen bei y_{i+1} neben y_i mehrere vorher berechnete Werte ein.

1. Eulersches Polygonzugverfahren

$$y(x_0+h) = \cancel{f(x,y),\ y(x_0)=y_0}$$

$$= y(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))\,dx$$

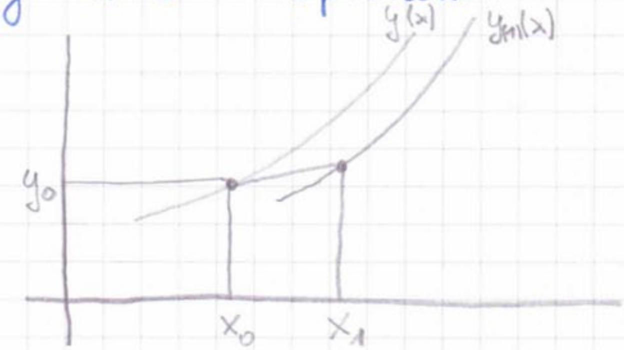
$$\approx h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$F = h \cdot f(x_0, y_0)$$

$$y(\underbrace{x_1}_{x_0+h}) \approx \overbrace{y_0 + h\, f(x_0, y_0)}^{=y_1}$$

4. Beginn VO am 30.10.2009

geometrische Interpretation



$y_{(1)}(x)$ Lösung der AWA $y' = f(x,y)$

$y(x_1) = y_1$

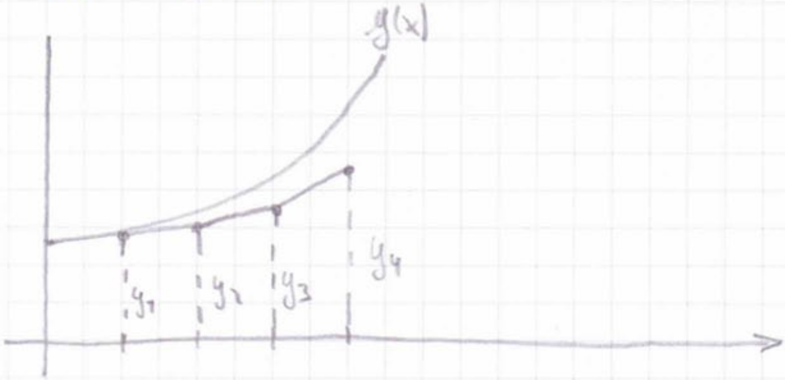
$$y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i, y_i)$$

bei jedem dieser n Schritte macht man einen lokalen Verfahrensfehler $O(h^2)$ für $h \to 0$.

Summe der lokalen Verfahrensfehler $\to$ globaler Verfahrensfehler $\frac{1}{h}\, O(h^2) = O(h)$

n-Schritte: $h = \frac{b-a}{n} \Rightarrow n = b-a \cdot \frac{1}{h} = c \cdot \frac{1}{h}$

Polygonzugverfahren:



2. Verbessertes Euler'sches Polygonzugverfahren

$$y(x_0+h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))\, dx$$

Sehnentrapezformel mit einem Teilintervall

$x_1 = x_0 + h$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\, dx \approx \frac{x_1 - x_2}{2} \left(f(x_0, y(x_0)) + f(x_1; \underbrace{y(x_1)}_{=?}) \right)$$

$$y(x_1) \overset{(1)}{\approx} y_1^E = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0)$$

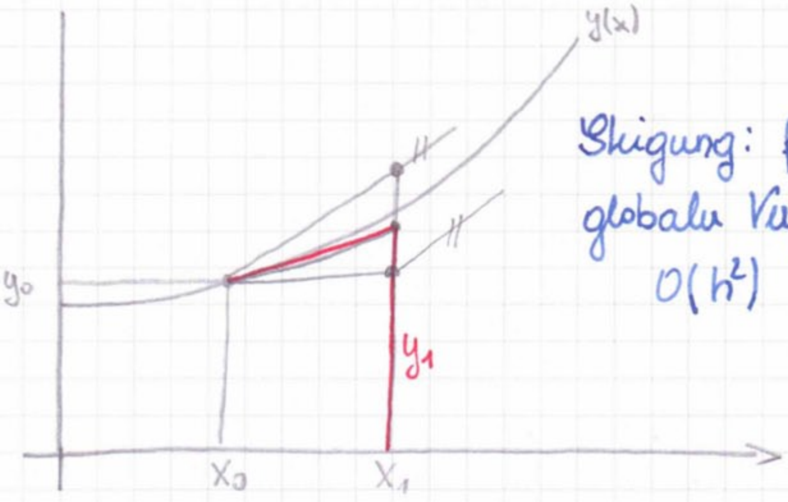
$$\Rightarrow y(x_1) = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\, dx \approx$$

$$y_0 + \frac{h}{2} \left(f(x_0, y_0) + f(x_1, y_0 + h\, f(x_0, y_0)) \right)$$

weitere Schritte:

$$\boxed{\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2} \left(k_1^{(i)} + k_2^{(i)} \right) \\ k_1^{(i)} &= f(x_i, y_i) \quad ; \quad k_2^{(i)} = f(x_{i+1}, y_i + h\, f(x_i, y_i)) \end{aligned}}$$

geometrische Interpretation



Steigung: $f(x_1, y_1^E)$

globaler Verfahrensfehler: $O(h^2)$

V.E.P. gehört zu Prädikator-Korrektor Verfahren

$y_1^{(0)}$ ... Prädikator

$y_1^{(1)}$ ... Korrektor

3. Klassisches RUNGE – KUTTA – Verfahren

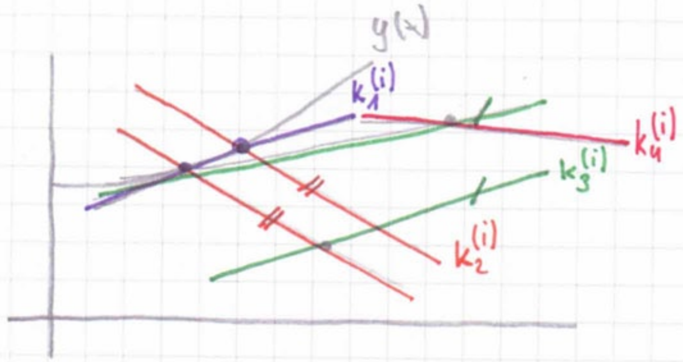
$$y(x_0 + h) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+h} f(x, y(x))\,dx$$

Keppler'sche Fassregel anwenden

Allgemein:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$\boxed{\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right) \\ k_1^{(i)} &= f(x_i, y_i) \\ k_2^{(i)} &= f\left(x_1 + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2} k_1^{(i)}\right) \\ k_3^{(i)} &= f\left(x_1 + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{h}{2} k_2^{(i)}\right) \\ k_4^{(i)} &= f\left(x_1 + h,\ y_i + h\, k_3^{(i)}\right) \end{aligned}}$$



globaler Verfahrensfehler $O(h^4)$

Nachteil: größerer Rechenaufwand

Bsp.: $y' = x(1-y)$, $y(0) = 0{,}1$ Lösung im $[0, 3]$

exakte Lösung: $\frac{y'}{1-y} = x \Rightarrow \int \frac{dy}{1-y} = \int x\,dx$

$\Rightarrow -\ln|1-y| = \frac{x^2}{2} + \ln(c)$

$\Rightarrow \frac{1}{y-1} = c\,e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\Rightarrow y(x) = 1 - \frac{1}{c} e^{\frac{x^2}{2}} = 1 - c_1 e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\Rightarrow y(x) = 1 - 0{,}9\, e^{-x^2/2}$

numerische Lösung:

Schrittweite $h = 0{,}25$, $n = 12$

1. Euler'sches Polygonzugverfahren

$x_i = x_0 + h = i \cdot 0{,}25$

$y_{i+1} = y_i + h f(x_i, y_i)$

$x_0 = 0$, $y_0 = 0{,}1$

$x_1 = 0{,}25$, $y_1 = y_0 + 0{,}25 \cdot 0 \cdot (1 - 0{,}1) = 0{,}1$

$x_2 = 0{,}5$ $y_2 = y_1 + 0{,}25 \cdot 0{,}25 (1 - 0{,}1) = 0{,}1563$

usw.

2. Verbessertes Euler'sches Polygonzugverfahren

$x_i = \cancel{x_0}\ i \cdot 0{,}25$, $y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(k_1^{(i)} + k_2^{(i)})$

$k_1^{(i)} = f(x_i, y_i)$, $k_2^{(i)} = f(x_{i+1}, y_i + h f(x_i, y_i))$

$x_0 = 0$, $y_0 = 1$

$x_1 = 0{,}25$, $y_1 = 0{,}1 + \frac{0{,}25}{2}(0 + 0{,}225) = 0{,}128$

$k_1^{(0)} = x_0 (1 - y_0) = 0 (1 - 0{,}1) = 0$

$k_2^{(0)} = x_1 (1 - (y_0 + 0{,}25 \cdot 0 \cdot (1 - 0{,}1))) = 0{,}225$

usw.

3) Runge - Kutta - Verfahren

$x_i = i \cdot 0{,}25$

$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right)$

$k_1^{(i)} = f(x_i, y_i) \qquad k_2^{(i)} = f(x_i + h/2, \; y_i + \frac{h}{2} k_1^{(i)})$

$k_3^{(i)} = f(x_i + \frac{h}{2}, \; y_i + \frac{h}{2} k_2^{(i)}), \qquad k_4^{(i)} = f(x_i + h, \; y_i + h k_3^{(i)})$

$x_0 = 0, \quad y_0 = 0{,}1$

$x_1 = 0{,}25 \quad y_1 = 0{,}12717$

$k_1^{(0)} = f(x_0, y_0) = 0 \cdot 0{,}9 = 0$

$k_2^{(0)} = \cancel{f}\, 0{,}125\left(1 - \left(0{,}1 + \frac{0{,}25}{2} \cdot 0\right)\right) = 0{,}1125$

$k_3^{(0)} = 0{,}1107$

$k_4^{(0)} = 0{,}2181$

usw

Weitere Schritte: siehe Folie

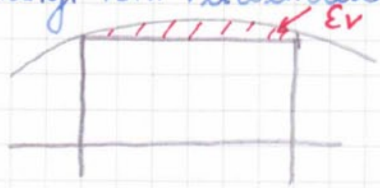
Wie groß wählt man Schrittweite h?

Bei der numerischen Lösung (DGL, Int., ...) entstehen 2 Arten von Fehlern:

1. Verfahrensfehler (ε_v)

   Unterschied zwischen exakter Lösung zur Verfahrenslösung

   ε_v hängt vom verwendeten Verfahren ab

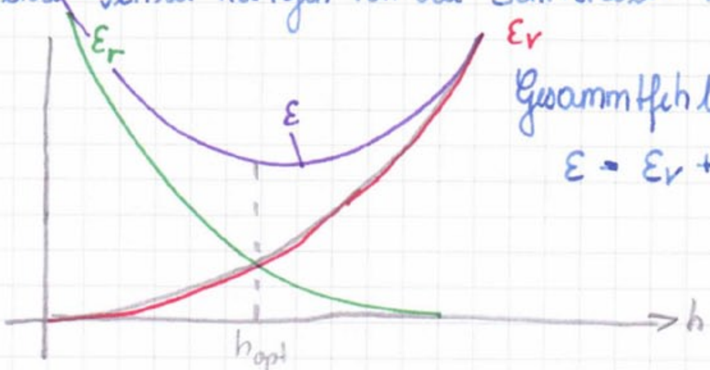


2. Rechenfehler (Rundungsfehler) (ε_r)

   Um die Näherungslösung effektiv berechnen zu können müssen Operationen, Funktionsauswertungen ... auf einem Rechner durchgeführt werden und zwar mit den zur Verfügung stehenden Maschinenzahlen; dabei werden Rundungsfehler gemacht;

   Abhängig vom Rechner und auch von der gewählten Implementierung.

Beide Fehler hängen von der Schrittweite h ab:



Gesamtfehler:

$$\varepsilon = \varepsilon_v + \varepsilon_r$$

$h_{opt} \approx$ dort wo $\varepsilon_r = \varepsilon_v$

bei DGL: $K = h \cdot \lambda$

λ ... Lipschitz-Konstante

→

siehe Satz von Existenz und Eindeutigkeit der Lösung von DG

$y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$ | $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| < \lambda |y_1 - y_2|$

$0{,}05 \leq K \leq 0{,}2$

Man passt K so an das erfüllt ist

Fourier - Analyse

Kap. 8

8.1 Fourier - Reihen

Zerlegen von periodischen Vorgängen in ihre harmonischen Bestandteil (Sinus / Cosinus - Schwingung)

<u>Def:</u> $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt periodisch mit Periode $T > 0$:

$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}: f(t+T) = f(t)$

$f(t)$ ist T-periodisch

Periode T: kleinstmögliche (primitive) Periode

Bsp: sin, cos : 2π - periodisch

tan : π - periodisch

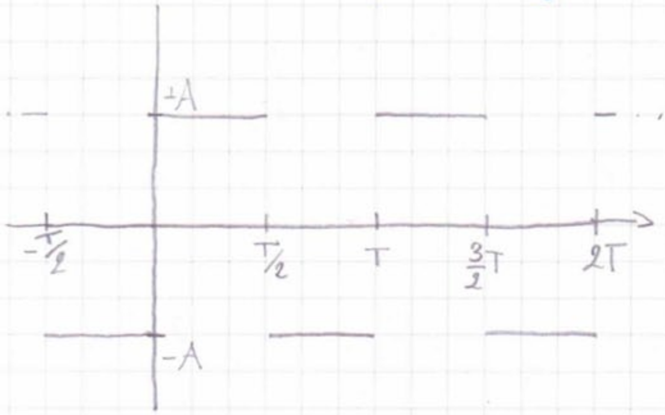
$e^{it\alpha} = \cos(t\alpha) + i \sin(t\alpha)$ ist $\frac{2\pi}{\alpha}$ periodisch

5. Beginn VO am 06.11.2009

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,(\mathbb{C})$ heißt T-periodisch $(T>0)$

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R}: f(t+T) = f(t)$$

Bsp.: $f(t) = \begin{cases} A, & \lfloor \frac{2t}{T} \rfloor \text{ gerade} \\ -A, & \lfloor \frac{2t}{T} \rfloor \text{ ungerade} \end{cases}$



Bemerkung: $f(t)$ ist t-periodisch

$$\Rightarrow F(t) := f\left(t \cdot \frac{T}{2\pi}\right) \text{ ist } 2\pi\text{-periodisch}$$

$$F(t+2\pi) = f\left((t+2\pi)\cdot\frac{T}{2\pi}\right) = f\left(t\frac{T}{2\pi} + T\right) = f\left(t\frac{T}{2\pi}\right) = F(t)$$

$\omega := \frac{2\pi}{T}$: Umrechnungsfaktor für von T-period. auf 2π-period. Funktion

Lemma: $f(t)_T$: T-periodisch, integrierbar

$$\Rightarrow \int_0^T f(t)\,dt = \int_a^{a+T} f(t)\,dt$$

Beweis: oBdA. $0 < a < T$

$$\int_a^{a+T} f(t)\,dt = \int_a^T + \int_T^{T+a} = \int_a^T f(t)\,dt + \int_T^{a+T} f(t)\,dt =$$

$t = x + T$

$dt = dx$, $t = T \Rightarrow x = 0$

$t = T + a \Rightarrow x = a$

$$\int_a^T f(t)\,dt + \int_0^a f(x+T)\,dx = \int_a^T f(t)\,dt + \int_0^a f(t)\,dt = \int_0^T f(t)\,dt$$

Def: Ein trigonometrisches Polygon der Periode T

in sin - cos - Form:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n \omega t) \right)$$

$$a_0, a_n, b_n \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$$

in Exponentialform:

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} \quad , \; c_k \in \cancel{\mathbb{R}}\, \mathbb{C}$$

Eulersche Formel:

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x) \, ,$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) ,$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

$$e^{i\omega t n} = \cos(n\omega t) + i \sin(n \omega t)$$

$$e^{-in\omega t} = \cos(n\omega t) - i \sin(n\omega t)$$

$$e^{-in\omega t} = e^{i\omega t}$$

$$\frac{a_0}{2} = c_0 \Rightarrow c_0 = 2a_0$$

$$\begin{aligned} a_n &= c_n + c_{-n} \\ b_n &= (c_n - c_{-n})\, i \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} c_k &= \frac{a_k - ib_k}{2} \\ c_{-k} &= \frac{a_k + ib_k}{2} \end{aligned}$$

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{N} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right)$$

$a_N^2 + b_N^2 > 0$

$N \ldots$ Grad von ~~f~~ $f(t)$

$(|c_N|^2 + |c_{-N}|^2 > 0)$

Bsp.: $f(t) = \cos(t)^3$ lässt sich als trig. Polynom 3. Grades darstellen

$$\cos(3t) = Re(e^{i3t}) = Re((e^{it})^3) = Re((\cos(t) + i\sin(t))^3)$$

Mittels binom. Lehrsatz $\Rightarrow$

$$= \cos(t)^3 - 3(\cos(t)\sin(t)^2)$$

$$= \cos(t)^3 - 3\cos(t)(1 - \cos(t)^2) =$$

$$= 4\cos(t)^3 - 3\cos(t)$$

$$\Rightarrow \cos(t)^3 = \frac{1}{4}\cos(3t) + \frac{3}{4}\cos(t)$$

Allgemein: $\cos(nt) = T_n(\cos(t))$

$T_n \ldots$ Polynom 3. Grades

Tschebyscheff - Polynom

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

Trig. Polynome bilden einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$)

- Summe von zwei trig. Polynome ist trig. Polynom
- Vielfache (mit Faktor aus $\mathbb{C}$) ~~ist~~ eines trig. Polynom ist wieder trig. Polynom

für + und $\lambda\cdot$ gelten Rechenregeln für VR

Vektorraum V = lin. Hülle$(\{1\} \cup \{\cos(n\omega t) : n \in \mathbb{N}^+\}$
$\cup \{\sin(n\omega t) : n \in \mathbb{N}^+\})$

lin. Hülle $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3) = \{\lambda_1 \vec{x}_1, \lambda_2 \vec{x}_2, \lambda_3 \vec{x}_3 \mid \lambda_i \in \mathbb{C}\}$

V = lin. Hülle$(\{e^{ik\omega t} : k \in \mathbb{Z}\})$

in V ist ein <u>Skalarprodukt</u> definiert:

$$f(t), g(t) \in V: \quad (f(t), g(t)) := \int_0^T f(t) \cdot \overset{\text{konj. komplex}}{\overline{g(t)}}\, dt$$

<u>Skalarprodukt:</u> $(.\,,\,.)\ V \times V \to \mathbb{C}$

$$(f_1 + f_2(t), g(t)) = (f_1(t), g(t)) + (f_2(t), g(t))$$

$$(f(t), g(t)) = \overline{(g(t), f(t))}.$$

insbesondere muss gelten:

$$(f(t), f(t)) \geq 0 \wedge (f(t), f(t)) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$$

Skalarprodukt $\Rightarrow$ Längen und Winkelmessung

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}, \vec{x})}, \quad \varphi = \sphericalangle(\vec{x}, \vec{y}) : \cos(\varphi) = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

hier: $\|f(t)\|^2 = (f(t), f(t)) = \int_0^T \underbrace{f(t) \cdot \overline{f(t)}}_{|f(t)|^2 \geq 0}\, dt \geq 0$

$(f(t), f(t)) \geq 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$

$\boxed{\Leftarrow}$ ✓ $\boxed{\Rightarrow}$: $f(t) \neq 0$: $\int_0^T |f(t)|^2 dt$

$\exists t_0 \in [0, T] : f(t_0) \neq 0 \Rightarrow |f(t)|^2 > 0$

weil $f(t)$ ist trigon. Polynom ist stetig

$\Rightarrow |f(t)|^2 \geq \varepsilon \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t + \delta)$

$\Rightarrow \int_0^T |f(t)|^2 dt > \varepsilon : 2\delta > 0$

$\Rightarrow \int_0^T |f(t)|^2 dt = (f(t), f(t)) > 0$

$((.\,,\,.)$ ist nicht ausgeartet$)$

positiv definit.

Satz: (Orthogonalität der Winkelfunktionen, Eindeutigkeit der Darstellung der trigon. Polynome)

1) Die Basismengen $B_1 = \{e^{ik\omega t} : k \in \mathbb{Z}\}$ und $B_2 = \{1\} \cup \{\cos(n\omega t) : n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{\sin(n\omega t) : n \in \mathbb{N}^+\}$ bilden jeweils ein Orthogonalsystem im Raum V der trig. Polynome.

d.h.: • $\int_0^T e^{ik\omega t} \cdot \underbrace{\overline{e^{il\omega t}}}_{e^{-il\omega t}} dt = (e^{ik\omega t}, e^{il\omega t})$

$$= \begin{cases} 0 : k \neq l \\ T : k = l \end{cases} \quad \forall k, l \in \mathbb{Z}$$

• $(\cos(n\omega t), \cos(m\omega t))$

$$= \begin{cases} 0 : n \neq m \\ \frac{T}{2} : n = m \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^+$$

• $(\sin(n\omega t), \sin(m\omega t))$

$$= \begin{cases} 0 : n \neq m \\ \frac{T}{2} : n = m \end{cases} \quad \forall n, m \in \mathbb{N}^+$$

2) $f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-N}^{N} c_k' e^{ik\omega t}$

$$\Rightarrow c_k = c_k' \quad \forall k \in [-N, N]$$

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

$\Rightarrow a_0, a_n, b_n$ eindeutig bestimmt

Beweis: 1) $\left(e^{ik\omega t}, e^{il\omega t}\right) = \int_0^T e^{ik\omega t} e^{-il\omega t} dt =$

$$= \int_0^T e^{i\omega t(k-l)} dt = \frac{1}{i\omega(k-l)} e^{i\omega t(k-l)} \Big|_0^T$$

$$= \frac{1}{i\omega(k-l)} \left(e^{i\frac{2\pi}{T} T (k-l)} - \underbrace{e^{i\frac{2\pi}{T} \cdot 0 (k-l)}}_{=1} \right)$$

$$= \underbrace{\cos(2\pi(k-l))}_{=1} + \underbrace{i \sin(2\pi(k-l))}_{=0} = 1$$

$$k = l: \int_0^T e^{i\omega t \underbrace{(k-l)}_{=0}} dt = \int_0^T 1 \, dt = t \Big|_0^T = T$$

2) $$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} = \sum_{k=-N}^{N} c_k' e^{ik\omega t}$$

$$\left(\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t}, e^{il\omega t} \right) = \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k' e^{ik\omega t}, e^{il\omega t} \right)$$

$$\int_0^N \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} \cdot e^{-il\omega t} dt = \int_0^N \sum_{k=-N}^{N} c_k' e^{ik\omega t} \cdot e^{-il\omega t} dt$$

$$\sum_{k=-N}^{N} c_k \underbrace{\int_0^T e^{i\omega t(k-l)} dt}_{\substack{= 0 \,:\, k \neq l \\ = T \,:\, k = l}} = \sum_{k=-N}^{N} c_k' \int_0^N e^{i\omega t(k-l)} dt$$

$$c_l \cdot T = c_l' \cdot T$$

$$c_l = c_l' \quad \forall l \text{ mit } |l| \leq N$$

Bemerkung: Aus orthogonalität $\Rightarrow$ lin. unabh.

Satz: (Formel von Euler-Fourier)

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot e^{-ik\omega t} \, dt$$

$0 \leq n \leq N$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) \, dt$$

Beweis:

$$f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} \quad \Big| \cdot e^{-il\omega t}, \int_0^T$$

$$\int_0^T f(t) e^{-il\omega t} dt = \sum_{k=-N}^{N} c_k \int_0^T e^{i\omega t (k-l)} dt = c_l \cdot T$$

$=0 : l \neq k$
$=T : l = k$

$$c_l = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-il\omega t} dt$$

6. Beginn VO am 13.11.2009

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t) \right]$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt \;*$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt$$

$$a_n = (f(t), \cos(n\omega t)) \;,\; b_n = (f(t), \sin(n\omega t))$$

in $V = \mathbb{R}^n$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i} \;,\; \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

kanonische Basis $\{\vec{e_i} \mid i = 1, \dots, n\}$

$$\vec{e_i} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i. Stelle}$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

$\{\vec{e_i} \mid i = 1 \dots n\}$
Orthonormal Basis

$V =$ trig. Polygon $\mathcal{B} = \{ \cos(n\omega t), \sin(n\omega t) : n = 1 \dots N\} \cup \{1\}$
Orthogonalbasis

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i \vec{e_i} \qquad x_i = (\vec{x}, \vec{e_i}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{i. Stelle}$$

__Bemerkung:__ $a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t)\, dt$$

wenn $f(t)$ ungerade $\Rightarrow \underbrace{f(t)}_{\text{ung}} \underbrace{\cos(n\omega t)}_{\text{gerade}}$ ung.

$(f(-t)) = -f(-t)$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \cos(n\omega t)\, dt = 0$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \sin(n\omega t)\, dt = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cancel{dt}\sin(n\omega t)\, dt$$

• wenn $f(t)$ gerade $(f(-t) = f(t))$

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos(n\omega t)\, dt$$

<u>Bsp.:</u> $f(t) = \sin(t)^2$ gerade $\Rightarrow b_n = 0$

$$a_0 = \frac{4}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(t)^2\, dt =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \cos(2t)) \, dt = \frac{1}{\pi} \left. \left(t - \frac{1}{2}\sin(2t)\right) \right|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi} \pi = 1$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(t)^2 \cancel{dt} \cos(t)\, dt = 0$$

$$a_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \underbrace{\sin(t)^2}_{\frac{1}{2}(1-\cos(t)^2)} \cos(2t)\, dt = \dots = \frac{1}{2}$$

$$a_k = 0 \mid k \geq 3$$

$\cancel{\cos \sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \sin(2t)^2)}$

$$\cos(t)^2 = \frac{1}{2}(1 + \cos(4t))$$

$$\sin(t)^2 = f(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2t)^2 = \frac{1}{2}(1 - \cos(t)^2)$$

<u>bisher:</u> $f(t)$ trig. Polynom; jetzt: $f(t)$ beliebiges Taylorpolynom

$$f(t) \overset{?}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t))$$

trig. Reihe

<u>Konvergenz:</u> wenn trig. Reihe $\forall t \in \mathbb{R}$ konvergiert $\Rightarrow$ Summenfunktion ist T-periodisch

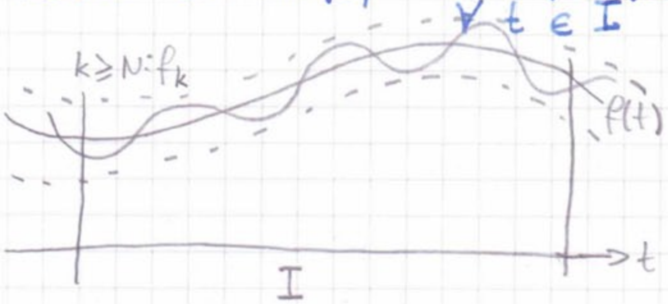
- es gibt trig. Reihen die für kein $t \in \mathbb{R}$ konvergieren

<u>Allgemeines:</u> zur Konvergenz von Funktionenfolgen $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$

Def: $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig auf einem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ gegen Funktion $f(x)$

$\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \ \forall n \geq N(\varepsilon) \ \forall t \in I : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$



$(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert punktweise gegen $f(t) \Leftrightarrow \forall t \in I$:

$$f_n(t) \to f(t)$$

$$\forall t \in I \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon, t) : \forall n \geq N : |f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$$

glm. konv $\Rightarrow$ pkt. konv.

Spezialfall: $s_n(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x)$

$$s_N(x) \xrightarrow[N\to\infty]{glm} s(x)$$

wenn ja: $s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

Satz: (Weierstraß'scher M-Test für glm. Konvergenz)

$\exists (M_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $|f_k(x)| \leq M_k$ $\forall x \in I \wedge \sum_{k=0}^{\infty} M_k < \infty$

$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ist glm. konvergent, d. h.

$$s_N(x) = \sum_{k=0}^{N} f_k(x) \xrightarrow[N\to\infty]{glm.} \sum_{\substack{\cancel{N\to\infty} \\ k=0}}^{\infty} f_k(x)$$

Beweis: $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ ist konvergente Majorante für $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$

Reihenrest: $\left|\sum_{k=N}^{\infty} f_k(x)\right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=N}^{\infty} M_k < \varepsilon$

Satz: Wenn $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ glm. konvergent auf I und f_k stetig auf I gilt:

(i) $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ ist stetig

(ii) Reihe kann gliedweise integriert werden:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_a^b f_k(x)\,dx \right.$$

Wiederholung: $f(x)$ stückweise stetig auf $I=[a,b]$, wenn
$f(x)$ stetig $\forall x \in I \setminus \{t_1, \dots, t_m\}$
und t_1 bis t_m sind Sprungstellen
dh. $\exists \lim\limits_{x \to t_i \pm} f(x)$

$f(x)$ stückweise stetig differenzierbar auf $I=[a,b]$, wenn
$f(x)$ diffbar, $f'(x)$ stückw. stetig
bis auf endlich viele Ausnahmepunkte

Satz: Wenn $\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}}_{T\text{-period.}} := \lim\limits_{N \to \infty} \left(\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t} \right)$ glm. $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Updownarrow$ $(\forall t \in [0,T])$

gegen $f(t)$, dann ist $f(t)$ stetig
und:
$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt$$

Beweis: $f(t)$ stetig: siehe Satz vorher
$$\int_0^T f(t)\, e^{-ik\omega t}\, dt = \int_0^T \left(\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{+il\omega t} \right) e^{-ik\omega t}\, dt \overset{(ii)}{=}$$
$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \int_0^T \left(c_l e^{il\omega t} \right) e^{-ik\omega t}\, dt =$$
$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \underbrace{\left(e^{il\omega t}, e^{ik\omega t} \right)}_{\substack{=0 \text{ für } l \neq k \\ =T \quad l=k}} = c_k \cdot T$$

Bsp: $f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin(nt) \qquad T = 2\pi$

$$\frac{1}{n^2} \underbrace{\sin(nt)}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

$\Rightarrow$ glm. konvergent

$\Rightarrow$ $f(t)$ stetig

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt = \frac{1}{n^2}$$

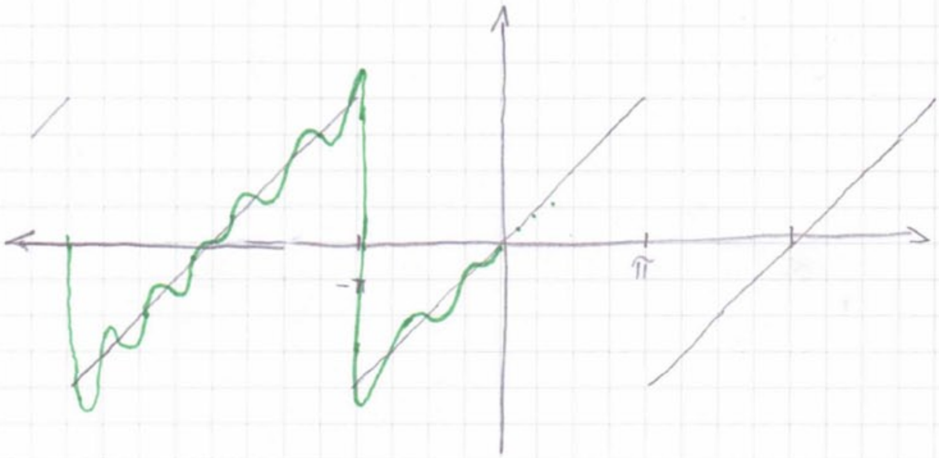
geg: $f(t)$ T-periodisch, betrachten jene trig. Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t} \quad \text{mit } c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt$$

$$f(t) \stackrel{?}{=} \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}}_{S_f(t)} \quad \text{... Fourier-Reihe von } f(t)$$

- $f(t) \sim S_f(t)$: man weiß nicht, ob die Reihe konvergent ist (für welche t), bzw. ob gilt $f(t) = S_f(t)$

Bsp.: $f(t) = t$, $t \in [-\pi, \pi]$ 2π-periodisch



$\Rightarrow$ $f(t)$ stückweise stetig

weil $f(t)$ ungerade $(f(-t), = -f(-t))$

$\Rightarrow a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(nt)\, dt =$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{t}_{u} \underbrace{\sin(nt)}_{v'}\, dt = \frac{2}{\pi} \Big(-\frac{1}{n} \cos(nt) \cdot t \Big|_0^\pi -$$

$$- \int_0^\pi 1 \cdot \big(-\frac{1}{n} \cos(nt)\, dt \big) = \ldots = (-1)^{n+1} \cdot \frac{2}{n}$$

$$S_f(t) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) =$$

Fourier-Reihe $\quad 2\left(\sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) \ldots\right.$

- bei der Unstetigkeitsstelle $t = \pi$

$$S_f(t) = 0 = \frac{1}{2}\left(\lim_{t \to \pi+} (f(t)) + \lim_{t \to \pi-} (f(t))\right)$$

- Gibb'sches Phänomen:

  Schwungholen vor und nach Sprungstellen bei Partialsummen

$$S_f(t) = \begin{cases} f(t) & , t \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & , t = (2k+1)\pi \end{cases}$$

$$2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nt) \xrightarrow{glm} S_f(t)$$

nicht stetig

$$f(-t) = \sum c_{-k} e^{ik\omega t} \qquad f(t) = \sum c_k e^{ik\omega t}$$

<u>Beweis:</u> $d_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(-t)\, e^{-ik\omega t}\, dt = \left| \begin{array}{l} t = -x \\ dt = -dx \end{array} \right|$

$$\frac{1}{T} \int_0^{-T} f(x)\, e^{ik\omega t}\, (-dx) =$$

$$\frac{1}{T} \int_{-T}^{0} f(x)\, e^{ik\omega t}\, dx = c_{-k}$$

7. Beginn VO am 20.11.2009

Satz: (Diff. einer Fourierreihe)

$f(t)$ stetig und stückweise stetig differenzierbar

mit $S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$, $f(t)$ T-periodisch

$$\boxed{\Rightarrow \quad S_f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik\omega c_k) e^{ik\omega t}}$$

$$S_f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

$$S_f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[(b_n n\omega) \cos(n\omega t) + (a_n n\omega) \sin(n\omega t) \right]$$

Beweis:

$$S_f'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_n e^{ik\omega t}$$

obdA.: f auf $[0,T]$ diffbar, $\exists f'(t)$ $\forall t \in [0,T]$

$$d_k = \frac{1}{T}\int_0^T f'(t) e^{-ik\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\left[\left(f(t) e^{-ik\omega t}\right)\Big|_0^T - \right.$$

$$\left. - \int_0^T f(t)(-ik\omega) e^{-ik\omega t} \right] =$$

$$\frac{1}{T}\left(f(t) e^{-ik\frac{2\pi}{\cancel{T}}\cancel{T}} - f(0)\cdot e^0\right) + ik\omega t \frac{1}{T}\int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt =$$

$$= ik\omega c_k \Rightarrow d_k = ik\omega c_k$$

$$f(t_{i+1}) e^{-ik\omega t_{i+1}} - f(t_i) e^{-ik\omega t_i} + f(t_i) e^{-ik\omega t_i}$$

Satz: (Int. von Fourierreihen)

$f(t)$ stückweise stetig, T-period

$$S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$$

$$F(t) = \int_0^t f(t)\,dt \quad (\text{wenn } f \text{ stetig in } t: F'(t) = f(t))$$

$F(t)$ ist T-period. $\Leftrightarrow \int_0^T f(t)\,dt = 0$: $F(T) = \int_0^T f(t)\,dt = F(0) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

Unter dieser Voraussetzung gilt dann für die Fourierreihe von $F(t)$:

$$\boxed{S_F(t) = -\frac{1}{T}\int_0^T t\, f(t)\,dt + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik\omega} e^{ik\omega t}}$$

Beweis:

$F(t)$ stetig, stückweise stetig diff.

$$d_0 = \frac{1}{T}\int_0^T F(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{T}\left(t\cdot F(t)\Big|_0^T - \int_0^T t\cdot \underbrace{F'(t)}_{f(t)}\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{T}\left(T\cdot \underbrace{F(T)}_{=0} - 0\cdot F(0) - \int_0^T t\, f(t)\,dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{T}\int_0^T t\, f(t)\,dt$$

Satz von Diff anwenden:

$$\underbrace{S_F'}_{f}(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} (d_k\, ik\omega)\, e^{ik\omega t} = \sum c_k e^{ik\omega t}$$

$$c_k = (ik\omega)\, d_k$$

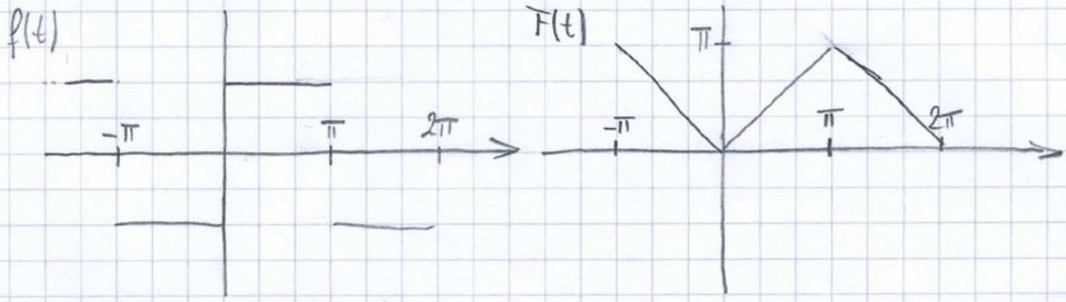
$$d_k = \frac{c_k}{ik\omega}$$

Bsp.: Rechtecksschwingung $f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t \le \pi \\ -1 & -\pi < t < 0 \end{cases}$

2π - period

$$S_f(t) = \frac{4}{T} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \sin(2n-1)t$$

$$F(t) = \int_0^t f(t)\, dt = \begin{cases} t & 0 \le t \le \pi \\ 2\pi - t & \pi \le t \le 2\pi \end{cases}$$



$$S_F(t) = d_0 - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)t$$

$$d_0 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t \cdot f(t)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} t\, dt + \int_{\pi}^{2\pi} (-t)\, dt \right) = \frac{\pi}{2}$$

Satz: (Bessel-Ungleichung)

$f(t)$ T-period, stückweise stetig

$$\Rightarrow \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right) = 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 \le \frac{2}{T} \int_0^T |f(t)|^2\, dt$$

Beweis: $S_N^f(t) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t}$; $(f, g) = \int_0^T f(t) \overline{g(t)}\, dt$

- $\frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{S_N(t)}\, dt =$ $\qquad \overline{a \cdot b} = \overline{a} \cdot \overline{b}$

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-N}^{N} \overline{c_k} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt =$$

$$\sum_{k=-N}^{N} \overline{c_k} \cdot \underbrace{\frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t}\, dt}_{c_k} =$$

$$\sum_{k=-N}^{N} \overline{c_k} \cdot c_k = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$$

$$\bullet\ \frac{1}{T}\int_0^T S_N(t)\,\overline{S_N(t)}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \Big(\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t}\Big)\Big(\sum_{l=-N}^{N} \overline{c_l}\, e^{-il\omega t}\Big)dt$$

$$= \frac{1}{T}\Big(\sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ik\omega t}, \sum_{l=-N}^{N} \overline{c_k}\, e^{ik\omega t}\Big) =$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-N}^{N}\sum_{l=-N}^{N} c_k\cdot \overline{c_k}\,\underbrace{\left(e^{ik\omega t}, e^{il\omega t}\right)}_{=\delta_{kl}\cdot T}$$

$$= \sum_{k=-N}^{N} c_k\,\overline{c_k} = \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2$$

$$0 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t) - S_N(t)|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T (f(t) - S_N(t))(\overline{f(t)} - \overline{S_N(t)})\,dt$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 - f(t)\overline{S_N}(t) - \overline{f(t)}\,S_N(t) + S_N(t)\,\overline{S_N(t)}\;dt$$

$$= \frac{1}{T}\Big(\int_0^T |f(t)|^2 dt\Big) - \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 - \cancel{\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2} + \cancel{\sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2}$$ ← weglassen, da reel

$$\Rightarrow \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^2 \leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2\,dt \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>Folgerung:</u> $f(t)$ stückweise stetig

$\Rightarrow$ Fourier-Koeffizienten sind quadratisch summierbar

d.h. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$, $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|^2 < \infty$, $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0 = \lim c_n$$

(Riemann-Lemma)

<u>Satz:</u> $f(t)$ T-period, $S_f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\omega t}$

$r \geq 0$: $f', \ldots, f^{(r-1)}$ stetig

$f^{(r)}$ stückweise stetig diff.

$$\Rightarrow \exists M < \infty : |c_k| \leq \frac{M}{|k|^{r+1}}$$

<u>Beweis:</u> Satz über Diff von F-Reihen

<u>Satz:</u> (Parseval'sche Gleichung)

$f(t)$ T-period, stückweise stetig

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 \, dt$$

<u>ohne Beweis!</u>

$$(f, g) = \int_0^T f(t) \cdot \overline{g(t)}\, dt$$

$$\|f\|_2 := \sqrt{(f, f)} = \left(\int_0^T |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad [2\text{-Norm von } f]$$

$$d(f, g) := \|f - g\|_2 = \left(\int_0^T |f(t) - g(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad \ldots \text{ Metrik}$$

<u>Konvergenz im quadratischen Mittel auf $[0, T]$</u>

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_2} f \iff \lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_2 = 0$$

$$f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\text{glm. auf } [0,T]} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_2} f$$

$$\not\Leftarrow$$

$\forall t \in [0, T]\ f_n(t) \to f(t)$ punktweise konvergenz

<u>Satz</u> (Konvergenz im quadrat. Mittel für Fourier-Reihen)

f stückweise stetig, T-period

$$\Rightarrow S_N^f(t) \xrightarrow[n \to \infty]{\|\cdot\|_2} f(t)$$

d.h.: $$\lim_{N \to \infty} \int_0^T |f(t) - S_N^f(t)|^2 dt = 0$$

<u>Bemerkung:</u>

$\lim\limits_{n \to \infty} S_N^f(t)$ muss garnicht existieren!

<u>Beweis:</u> über Parsevallsche Gleichung

Satz: (Eindeutigkeitssatz)

g, h T-period, stückweise stetig

$$f(t_0^+) = \lim_{t \to t_0^+} f(t_0)$$

$$\forall t \in \mathbb{R} : \quad g(t) = \frac{1}{2}(g(t^+) \pm g(t^-))$$

und Fourier-Koeff von g und h sind gleich

$$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R} : g(t) = h(t) \qquad c_k \quad d_k$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}$$

Beweis:

$$\underset{\forall N}{S_N^g(t) \overset{\uparrow}{=} S_N^h(t)} \qquad S_N^g \xrightarrow[N\to\infty]{\|.\|_2} g \qquad S_N^h \xrightarrow[N\to\infty]{\|.\|_2} h$$

$$\|g-h\|_2 = \|(g - S_N^g) + (S_N^g - h)\|_2 \leq$$

$$\underbrace{\|g - S_N^g\|_2}_{\xrightarrow[N\to\infty]{}} + \underbrace{\|S_N^h - h\|_2}_{\xrightarrow[N\to\infty]{}}$$

$$\Rightarrow \|g-h\|_2 = 0$$

$\Rightarrow$ weil stückw. stetig + Eig bei Sprungstellen

$g = h$

Satz: (Darstellungsgesetz bei glm Konvergenz)

f stetig, T-period

S_f konvergiert glm, d. h. $S_N^f(t) \xrightarrow[N\to\infty]{glm} S_f(t)$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}: \; S_f(t) = f(t)$

Satz: (Darstellungssatz für stückweise stetig differenzierbare Funktionen)

f: T-period, stückweise stetig diff.

1) $\forall t \in \mathbb{R}: \; \exists \lim\limits_{N\to\infty} S_N(t) = S_f(t)$, d.h. F-Reihe ist punktweise konvergent

2) $S_f(t) = \frac{1}{2}\left(f(t^+) + f(t^-)\right)$

insbes. f stetig bei t $\quad S_f(t) = f(t)$

3) Ist $f(t)$ stetig auf $[a, b] \subseteq [0, T] \Rightarrow$

$S_N(t) \xrightarrow[N\to\infty]{glm [a,b]} f(t)$

8. Beginn VO am 27.11.2009

Diskrete Fourier-Transformation (8.2)

Idee: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, T-period

teilen des Periodenintervals $[0, T]$ in N Teile

$(N \in \mathbb{N}^+)$

$t_j := j \cdot \Delta t$, $\Delta t = \frac{T}{N}$, $j \in \mathbb{Z}$, $j = 0, \ldots, N-1$

$y_j = f(t_j) = f(j \cdot \Delta t)$, $j \in \mathbb{Z}$

$f(t_N) = f(T) = f(0) = y_0$

y_j, $j \in \mathbb{Z}$ ist N-periodisch

$\vec{y} = (y_0, y_1 \ldots, y_{N-1})^T$

Allgemein: $y: \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ heißt diskrete periodische Funktion mit ~~p~~ Periode $N \in \mathbb{N}^+$

$\Leftrightarrow y(i+N) = y(i) \quad \forall i \in \mathbb{Z}$

Fourierreihe: $f(t)$, T-period $\to c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-ik\omega t} dt$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\approx \frac{1}{T} \sum_{j=0}^{N-1} f(t_j) e^{-ik\omega t} \cdot \Delta t =$$

$$\frac{1}{N \cancel{\Delta t}} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-k \frac{2\pi}{\cancel{T}} \cdot \frac{\cancel{T}}{N} i} \cancel{\Delta t} =$$

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-\frac{2\pi i}{N} kj}$$

Def: Die Fourierkoeffizienten (Spektralkoeffizienten) c_k, $k = 0, 1 \ldots N-1$ eines Vektors $\vec{y} = (y_0 \ldots y_{N-1}) \in \mathbb{C}^N$ sind definiert durch

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-\frac{2\pi}{N} kj}$$

$w = e^{\frac{2\pi i}{N}}$, $\overline{w} = e^{-\frac{2\pi i}{k}}$, $(\overline{w})^{kj} = \overline{(w^{kj})}$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_i \, \overline{w}^{kj}$$

$$(y_0, \dots, y_{N-1}) \xrightarrow{DFT} (c_0, \dots, c_{N-1})$$

DFT ... Diskrete Fourier-Transformation

w... primitive N-te Einheitswurzel

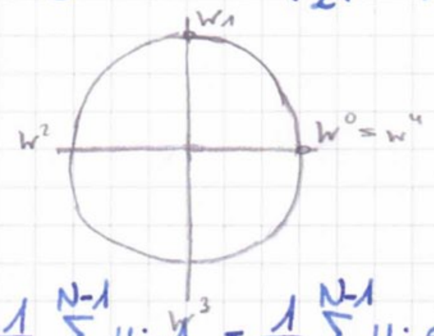
$$w^N = e^{\frac{2\pi i}{N} \cdot N} = e^{2\pi i} = 1 , \ (w^i)^N = (w^N)^i = 1^i = 1$$

Bsp.: $N = 4$, $w = e^{\frac{2\pi i}{4}} = e^{\frac{\pi i}{2}} = \cos(\frac{\pi}{2}) + i \sin(\frac{\pi}{2}) = i$

$w^2 = i^2 = -1$

$w^3 = w^2 w = -i$

$w^4 = \cancel{=} 1$



$$c_N = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-\frac{2\pi i}{N} N j} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j \cdot 1 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} y_j e^{-\frac{2\pi i}{N} \cdot 0 \cdot j}$$

$$= c_0$$

<u>Vereinfachung:</u>

$\vec{c} = (c_0, c_1, \dots, c_{N-1})^T$

$\vec{c} = \frac{1}{N} \overline{F_N} \, \vec{y}$ wobei $F_N = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^{N-1} \\ \vdots & w^2 & w^{22} & w^{2(N-1)} \\ 1 & w^{N-1} & & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}$

$F_N = (a_{kj})_{k,j = 1 \dots N-1}$

$$a_{kj} = w^{kj} \quad \overline{a_{kj}} = \overline{w^{kj}} = \overline{w}^{kj} = w^{-kj}$$

Satz: F_N ist invertierbar $\overline{F_N}^{-1} = \frac{1}{N}\overline{F_N}$

Beweis: $\frac{1}{N}\overline{F_N} \cdot F_N = E$ (Einheitsmatrix)

Eintrag j. Spalte, i. Zeile bei $\frac{1}{N}\overline{F_N} \cdot F_N$

$$\frac{1}{N}(1, w^{-i}, w^{-i2} \dots w^{-i(N-1)}) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \omega^{j} \\ \\ \omega^{j(N-1)} \end{pmatrix} =$$

$$\cancel{= \frac{1}{N}(1 + w^{j-i} + w^{2(i-j)}}$$

$$= \frac{1}{N}(1 + w^{j-i} + w^{2(j-i)} \quad \dots \quad + w^{(N-1)(j-i)})$$

1. Fall: $i = j$

$$\frac{1}{N}(1 + 1 \dots + 1) = 1$$

2. Fall $i \neq j$

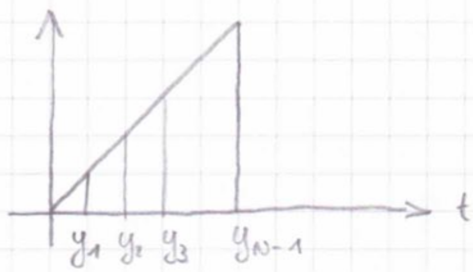
$$\frac{1}{N}\left(\frac{1-(\omega^{j-i})^N}{1-w^{j-i}}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{1-(w^N)^{j-i}}{1-w^{j-i}}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{1-1}{\dots}\right) = 0$$

$$\vec{c} = \frac{1}{N}\overline{F_N}\,\vec{y} \quad | \cdot F_N \Rightarrow F_N\vec{c} = F_N\left(\frac{1}{N}\overline{F_N}\right)\vec{y} = E\vec{y} = \vec{y}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{y} \xrightarrow{DFT} \frac{1}{N}\overline{F_N}\,\vec{y} = \vec{c} \\ \vec{c} \xrightarrow{IDFT} F_N \cdot \vec{c} = \vec{y} \end{array}\right\} \text{zueinander invers}$$

Bsp.: Diskrete Sägezahnfunktion

$$\vec{y} = (y_0, \dots, y_{N-1}) \qquad y_j = \frac{j}{N}$$



$$c_k = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} y_j W^{-kj} = \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} \frac{j}{N}(W^{-k})^j =$$

$$\frac{1}{N^2}\sum_{j=0}^{N-1} j\,(W^{-k})^j = ./.$$

$$\sum j x^j = ? \qquad \sum x^j = \frac{1-x^N}{1-x} \;\Big|\; \frac{d}{dx},\ \cdot x$$

$$\sum j x^j = x\left(\frac{1-x^N}{1-x}\right)' = \dots = \frac{x(1-x^N) - N(1-x)x^N}{(1-x)^2}$$

$$./. = \frac{1}{N^2}\,\frac{W^{-k}(1-W^{-kN}) - N(1-W^{-k})W^{-kN}}{(1-W^{-k})^2} =$$

$$= -\frac{1}{N}\,\frac{1}{1-W^{-k}} = c_k,\ k \neq 0$$

$k = 0$

$$./. = \frac{1}{N^2}\sum_{j=0}^{N-1} j = \frac{N-1}{2N} = c_0$$

$\vec{x} = (x_0, x_1 \dots x_{N-1})^T \rightarrow$ mit Periode N- fortsetzung

Periodische Faltung: $x = (x_k)_{k \in \mathbb{Z}}$, $y = (y_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

Faltung: $x * y = \left(\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x_j y_{k-j}\right)_{k \in \mathbb{Z}} = (z_k)_{k \in \mathbb{Z}}$

$$z_0 = \frac{1}{N}(x_0 \underbrace{y_0}_{= y_N} + x_1 y_{N-1} \dots + x_{N-1} y_1)$$

$$z_1 = \frac{1}{N}(x_0 y_1 + x_1 y_N + \dots \; x_{N-1} y_2)$$

Satz: $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{C}^N$, Spektralkoeffizienten:

$$\vec{c} = \frac{1}{N} \overline{F_N} \vec{y}$$

$$\vec{d} = \frac{1}{N} \overline{F_N} \vec{z}$$, dann gilt

$$\forall a, b \in \mathbb{C}: a\vec{y} + b\vec{z} \xrightarrow{DFT} a\vec{c} + b\vec{d}$$

DFT ist linear

$$(y_{k+n})_{k \in \mathbb{Z}} \xrightarrow{DFT} (w^{kn} c_k)$$

Verschiebung im Zeitbereich

$$(w^{kn} y_k) \xrightarrow{DFT} (c_{k-n})$$

— " — Freq. Bereich

$$y * z \xrightarrow{DFT} (c_k \cdot d_k)$$

Satz (Parseval'sche Gleichung)

$$\vec{c} = DFT(\vec{y}) = \frac{1}{N} F_N \vec{y}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |y_j|^2$$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |c_k|^2 = \sum_{k=0}^{N-1} c_k \overline{c_k} = \vec{c}^T \cdot \vec{c} = \left(\frac{1}{N} \overline{F_N} \vec{y}\right) \overline{\left(\frac{1}{N} \overline{F_N} \vec{y}\right)} =$$

$$= \frac{1}{N^2} \cdot \vec{y}^T \cdot \overline{F_N}^T \cdot \overline{\overline{F_N}} \cdot \overline{\vec{y}}$$

$$\overline{F_N} \cdot \overline{\overline{F_N}} = \overline{F_N} \cdot F_N = N \cdot E$$

$$= \frac{1}{N^2} \vec{y}^T \cdot N \cdot E \, \overline{\vec{y}} = \frac{1}{N} \cdot \vec{y}^T \cdot \overline{\vec{y}} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} |y_j|^2$$

Anwendungen:

- Algorithmus von Shor zur Faktorisierung von Zahlen mit Hilfe von Quantencomputern geht an entscheidender Stelle DFT ein
- mit Hilfe von DFT kann man einen schnellen Algorithmus zur schnellen Multiplikation von Polynomen formulieren:

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} y_j x^j \quad , \quad z(x) = \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} z_j x^j$$

$$y(x)\,z(x) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k x^k \quad , \quad a_k = \sum_{j=0}^{k} y_j z_{k-j} \quad \ldots \text{ Faltung}$$

↳ Mit Hilfe des Cauchy-Produkts

\# Multiplikationen : $\frac{N}{2} \cdot \frac{N}{2} = \frac{N^2}{4} = O(N^2)$

weniger Multiplikationen mit Hilfe der DFT

1) $\mathrm{DFT}(\underbrace{y_0, y_1, \ldots, y_{\frac{N-1}{2}}, 0, \ldots, 0}_{\text{Länge } N}) = (c_0, \ldots c_{N-1})$

$\mathrm{DFT}(z_0 \ldots z_{\frac{N-1}{2}}, 0 \ldots 0) = (d_0 \ldots d_{N-1})$

2) $(c_0 d_0, \ldots, c_{N-1} d_{N-1})$

3) $\mathrm{IDFT}(c_0 d_0, \ldots, c_{N-1} d_{N-1}) = (\overset{y * z}{a_0, \ldots a_{N-1}})$

Wir werden zeigen: bei 1) wenn $N = 2^r$ dann geht das mit $O(N \log(N))$

2) N Multiplik

3) wie 1)

gesammt:

$2\,O(N \log(N)) + O(N) + O(N \log N)$

$= O(N \log(N))$

DFT für $\underline{N = 2^r}$ heißt auch Fast Fourier Trans. (FFT)

↳ auch für andere N ↳ 1965 Cooley / Tucky

Idee anhand IDFT für $N = 2^r$, $r \geq 1$

geg: $(c_0, c_1, \dots, c_{N-1})$

ges: $y_j = \sum_{k=0}^{2^r-1} c_k e^{\frac{2\pi i}{2^r} kj}$

aufspalten für k gerade / ungerade

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{2^{r-1}-1} c_{2n} e^{\frac{2\pi i}{2^r} 2nj}}_{u(j)} + \underbrace{e^{\frac{2\pi i}{2^r}} \sum_{m=0}^{2^{r-1}-1} c_{2m+1} e^{\frac{2\pi i}{2^{r-1}} mj}}_{v(j)}$$

$$c_j = u(j) + e^{\frac{2\pi i}{2^r} j} \cdot v(j) \qquad j = 0 \dots 2^r - 1$$

$$u(j + 2^{r-1}) = u(j), \quad v(j + 2^{r-1}) = v(j)$$

$$c_j = u(j \bmod 2^{r-1}) + e^{\frac{2\pi i}{2^r}} v(j \bmod 2^{r-1})$$

d.h.: man braucht nur $(u(0), \dots, u(2^{r-1}-1))$

9. Beginn VO
am 04.12.2009

analog für v; Länge $2^{r-1} = \frac{N}{2}$

$$y(x) = \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} y_j x^j, \quad z(x) = \sum_{j=0}^{\frac{N-1}{2}} z_j x^j, \quad a_j = \sum_{k=0}^{j} y_k z_{j-k}$$

$$y(x) z(x) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j x^j$$

$$\vec{y} = (y_0, \dots, y_{\frac{N-1}{2}}, 0, 0 \dots 0) \xrightarrow{DFT} (c_0, \dots, c_{N-1})$$

$$\vec{z} = (z_0, \dots, z_{\frac{N-1}{2}}, 0, \dots, 0) \xrightarrow{DFT} (d_0, \dots, d_{N-1})$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \vec{y} * \vec{z} \xrightarrow{DFT} (c_0 d_0, \dots c_{N-1} d_{N-1})$$

$N = 2^r$ $(c_0, \dots, c_{N-1})$ geg.

$$y_j = \sum_{m=0}^{2^{r-1}-1} c_{2m} e^{\frac{2\pi i}{2^{r-1}} mj} + e^{\frac{2\pi i}{2^r}} \sum_{m=0}^{2^{r-1}-1} c_{2m+1} e^{\frac{2\pi i}{2^{r-1}} mj}$$

$$u(j + 2^{r-1}) = u(j) \quad ; \quad v(j + 2^{r-1}) = v(j)$$

$$y_j = u(j \bmod 2^{r-1}) + e^{\frac{2\pi i}{2^r}} v(j \bmod 2^{r-1})$$

d. h.: man braucht nur

$(u(0), \ldots\ldots, u(2^{r-1}-1))$

$(v(0), \ldots\ldots, v(2^{r-1}-1))$

rekursiv weitermachen: A_k = # Multiplikationen für Berechnung von IDFT eines Vektors der Länge 2^k

$\Rightarrow A_{k+1} = 2A_k + 2^{k+1}$ $\searrow \cdot e^{\frac{2\pi i}{2^v}}$

je A_k viele Mult. für $\vec{u}, \vec{v}$

Lösung: $A_k = k \cdot 2^k$

bei uns: $N = 2^v$: # Mult $= v \cdot 2^v = \log_2 N \cdot N$

$\Rightarrow$ # Mult für Berechnung der Koeff. von $y(x) \cdot z(x)$: $O(N \log_2 N) \ll N^2$

Bsp.: trigonometrische Interpolation

geg.: $t_j = \frac{2\pi}{N} \cdot j$, $j = 0 \ldots N-1$

y_j $j = 0 \ldots N-1$

ges: $f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}$ trig. Polynom vom Grad n

c_k können mit DFT berechnet werden

VS: N ungerade

$$n = \frac{N-1}{2} \quad \text{und } f(t) \text{ eindeutig bestimmt}$$

$$N = 2n+1 \qquad f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt} \quad , \quad \omega = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

$$y_j = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ik\frac{2\pi}{N}j}$$

$$= \sum_{k=-N}^{n} c_k \omega^{kj}$$

$$y_j = \omega^{-jn} \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \omega^{jk}$$

$$\omega^{jn} y_j = \sum_{k=0}^{2n} c_{k-n} \omega^{jk}$$

$$\Rightarrow (c_{k-n})_{k=0}^{2n} = \mathrm{DFT}(\omega^{jn} y_j)_{j=0}^{2n}$$

$$(c_0, c_1 \dots c_n, c_{-n} \dots c_{-1}) = \mathrm{DFT}(y_0 \dots y_{2n})$$

Fourier - Transformation

Def 1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Fourier-Transformierbar : $\Leftrightarrow$

$$\exists\ F(\omega) := \mathrm{CHW}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt\right) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega)$ .... Fourier-Transformierte (Spektralfunktion)

t... Zeitbereich, ω... Frequenzbereich

CHW... Cauchyscher Hauptwert

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt = \lim_{a,b \to \infty} \int_{-a}^{b} g(t)\, dt$$

$$\Downarrow \not\Uparrow$$

$$\mathrm{CHW}\left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\, dt\right) := \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} g(t)\, dt$$

Def 2) $\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) := \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{CHW}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega\right)$

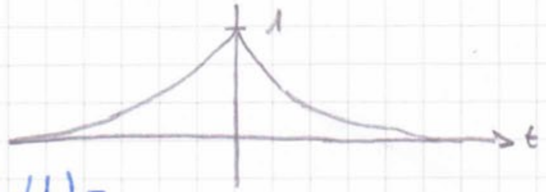
... Inverse Fourier - Transformation

Bemerkung: • F entsteht als Grenzprozess aus F.-Reihen beim Grenzübergang $T \to \infty$

F-Reihe	F-trans
$f(t)$... T-period	$f(t)$ ... keine Periode
Spektrum	
$(c_k)\ k \in \mathbb{Z}$	$F(\omega),\ \omega \in \mathbb{R}$
$f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ik\omega t}$	$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{-i\omega t}$

- $\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) = \frac{1}{2\pi}\,\mathcal{F}(F(-\omega))(t)$

Bsp.: $f(t) = e^{-|t|}$



$$F(\omega) = CHW\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|t|}\, e^{-i\omega t}\, dt\right) =$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^{+t}\, e^{-i\omega t} + \int_{0}^{\infty} e^{-t}\, e^{-i\omega t}\, dt =$$

$$\frac{1}{1-i\omega}\, e^{t(1-i\omega)}\Big|_{t=-\infty}^{t=0} + \frac{1}{-(1+i\omega)}\, e^{-t(1+i\omega)}\Big|_{t=0}^{t=\infty} =$$

$$\frac{1}{1-i\omega} - 0 + 0 + \frac{1}{1+i\omega} =$$

$$\frac{2}{1+\omega^2} \quad \omega \in \mathbb{R}$$

Def.: $f(t): \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ absolut integrierbar $\Leftrightarrow$
f auf jedem Intervall stückweise stetig und
$\exists \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt < \infty$

Satz (Konvergenzsatz): $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ abs int $\Longrightarrow$
$\exists\ \mathcal{F}(f(t))(\omega) \quad \forall \omega \in \mathbb{R}$ und es gilt

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt$$

(Parseval - Plancherel'sche Gleichung)

Bsp.: $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{t}\, dt = \infty;\ \int_{1}^{\infty} \left|\frac{1}{t}\right|^2 dt = -\frac{1}{t}\Big|_{1}^{\infty} = 1$

Regeln: • $\mathcal{F}(f(ct))(\omega) = \frac{1}{|c|} \mathcal{F}(\frac{\omega}{c})$ Streckung

• f stetig und stückweise stetig diffbar, $f'(t)$ Fourier-Transformierbar

$\Rightarrow \mathcal{F}(f'(t)) = i\omega F(\omega)$

• f nicht stetig, nur stückweise stetig, stückweise stetig diffbar, $f'(t)$ Fou...

Sprungstellen $t_1 \dots t_m$

$\Rightarrow \mathcal{F}(f'(t)) = i\omega F(\omega) - \sum_{k=1}^{m} (f(t_k^+) - f(t_k^-)) \cdot e^{-ik\omega t_j}$

• $t \cdot F(t)$ Fourier transformierbar

$\Rightarrow \mathcal{F}(t f(t)) = F'(\omega) i$

• $f(t), g(t)$ Faltung von f und g

$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u) g(u) \, du$

$\mathcal{F}((f*g))(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega) \cdot \mathcal{F}(g(t))(\omega)$

Bsp.: $f(t) = \begin{cases} e^{-at} & , t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

$$F(\omega) = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-i\omega t} \, dt = \frac{e^{-t(a+i\omega)}}{-(a+i\omega)} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+i\omega}$$

$$\mathcal{F}(f'(t)) = i\omega \cdot \mathcal{F}(f(t)) - f(0^+) - f(0^-) \, e^{-i\omega \cdot 0} =$$

$$i\omega \frac{1}{a+i\omega} - (1-0) \cdot 1 =$$

$$\frac{i\omega}{a+i\omega} - 1 = \frac{-a}{a+i\omega}$$

Bsp.: $f(t) = e^{-t^2}$ $\quad t \cdot f(t) = t \cdot e^{-t^2} = -\frac{1}{2}(e^{-t^2})'$

$$\mathcal{F}(t \cdot f(t)) = i \cdot F'(\omega)$$

$$i \cdot F'(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} t \cdot e^{-t^2} e^{-i\omega t} \, dt = \frac{e^{-t^2}}{-2} e^{-i\omega t} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{2} e^{i\omega t}(-i\omega) \, dt =$$

$$= -\frac{i\omega}{2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i\omega t} \, dt = -\frac{i\omega}{2} F(\omega)$$

$$i \cdot F'(\omega) = -\frac{i\omega}{2} F(\omega)$$

$$\Rightarrow F(\omega) = C \, e^{-\frac{\omega^2}{4}} = F(0) \, e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} e^{-i0t} \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \, dt$$

Parseval'sche Gleichung

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2t^2} \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(0)^2 e^{-\frac{\omega^2}{2}} \, d\omega \qquad \omega = 2u$$

$$d\omega = 2 \, du$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(0)^2 e^{-2u^2} \, 2du = \frac{F(0)^2}{\cancel{2}\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2u^2} \, du$$

$$1 = \frac{F(0)^2}{\pi} \Rightarrow F(0) = \sqrt{\pi}$$

$$\mathcal{F}(e^{-t^2})(\omega) = \sqrt{\pi} \, e^{-\frac{\omega^2}{4}}$$

Satz (Fourier'sches Integraltheorem)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ abs. int., in jedem endlichen Intervall stückweise stetig diff.

$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t))(\omega)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \, \mathrm{CHW}\left(\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} \, dt\right) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$$

insbes. f stetig

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f(t))) = f(t)$$

10.Beginn VO am 11.12.2009

$$\mathcal{F}(f(t))(\omega) := \text{CHW}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f(t))(\omega) := \frac{1}{2\pi}\, \text{CHW}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega$$

<u>Satz (Umkehr- / Eindeutigkeitssatz)</u>

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit:

1) f abs. int.

2) in endl. int. stückweise diff

3) $\forall t \in \mathbb{R}: f(t) = \frac{1}{2}(f(t^+) + f(t^-))$

$\Rightarrow F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$ existiert und

$$\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega = f(t)$$

$$\boxed{\mathcal{F}^{-1}(F(\omega))(t) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{2\pi} F(-\omega)\right)}$$

<u>Bsp.:</u> gesucht $x(t)$: $\int_{-\infty}^{\infty} x(u)\cdot x(t-u)\, du = e^{-t^2}$

Integralgleichung

$(x * x)(t)$

$\mathcal{F}(x * x(t))(\omega) = X(\omega)\cdot X(\omega)$, $X(\omega) = \mathcal{F}(x(t))(\omega)$

$X(\omega)^2 = \mathcal{F}(x * x(t))(\omega) = \mathcal{F}(e^{-t^2}) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

$X(\omega) = \sqrt[4]{\pi}\, e^{-\frac{\omega^2}{8}} = \sqrt[4]{\pi}\, e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$\mathcal{F}(f(ct)) = \frac{1}{|c|} F\left(\frac{\omega}{c}\right)$

$\mathcal{F}(e^{-(ct)^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{|c|}\, e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{2}$

$\mathcal{F}(e^{-2t^2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}\, e^{-\frac{\omega^2}{8}}$

$x(t) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}}\, e^{-2t^2}$

Bsp.: Ideales Tiefpassfilter

Signal $f(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)$

Zeitvariable Frequenzvariable

Tiefpassfilter:
- alle Frequenzen mit $|c| < \Omega$ können ungestört passieren
- alle Frequenzen mit $|c| > \Omega$ werden gefiltert

Wirkung des Filters: $F(\omega) \xrightarrow{\text{Filter}} F(\omega) \cdot H(\omega)$

$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{für } |c| < \Omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$F(\omega) \cdot H(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(t) \cdot h(t)$$

$$h(t) = \mathcal{F}^{-1}(H(\omega))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{+i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} 1 \cdot e^{i\omega t} d\omega =$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{it} e^{i\omega t} \Big|_{-\Omega}^{\Omega} = \frac{1}{2\pi i t} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) =$$

$$\frac{1}{\pi t} \sin(\Omega t) = \frac{\Omega}{\pi} \frac{\sin(\Omega t)}{\Omega t} =$$

$$\operatorname{sinc}(t) = \operatorname{si}(t) = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{\Omega}{\pi} \operatorname{si}(\Omega t)$$

Laplace - Transformation

Def: $f: [0, \infty] \to \mathbb{C}$

heißt Laplace transformierbar $\iff$

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = F(s) \quad \text{für ein } s \in \mathbb{R}$$

$$= \mathcal{L}(f(t))(s) \quad t \ldots \text{Zeitbereich}$$

Bemerkung: ~~∃ F~~

$\exists F(s) \Rightarrow \exists F(s_1) \quad \forall s_1 > s$

$t \geq 0 : e^{-s_1 t} < e^{st} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt < \infty$

$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-s_1 t} f(t)\, dt < \infty$

Konvergenz Abszisse

$$G_c(f) := \inf\{ s \in \mathbb{R} : \exists \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt < \infty \}$$

$$\Rightarrow \exists F(s) \quad \forall s > G_c(f)$$

$$\overset{\shortparallel}{\mathcal{L}(f(t))(s)}$$

man kann $F(s)$ definieren für $s \in \mathbb{C}$, mit $\mathrm{Re}(s) > G_c(f)$

Bsp.: $f(t) = e^{\omega t}$, $\omega \in \mathbb{C}$ fest

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} e^{\omega t}\, dt = \int_0^\infty e^{(\omega - s)t}\, dt =$$

$$\frac{1}{\omega - s} e^{(\omega - s)t} \Big|_0^\infty = \lim_{t \to \infty} (e^{(\omega - s)t}) =$$

$$\lim \underbrace{e^{\alpha t}}_{\to 0} \underbrace{e^{i\beta t}}_{|\,| \to 1} = 0$$

$\mathrm{Re}(\omega - s) < 0$

$\omega - s = \alpha + i\beta$

$\alpha \geq 0 : \lim_{t \to \infty} \nexists$

Spezialfall

$\omega = 0 \quad f(t) = e^0 = 1 \quad \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$

$\omega \in \mathbb{R} \quad \mathcal{L}(e^{\omega t}) = \frac{1}{s-\omega}, \quad s > \omega$

$\omega = i\alpha \in i\mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $\quad \mathcal{L}(e^{i\alpha t}) = \frac{1}{s-i\alpha} \cdot \frac{s+i\alpha}{s+i\alpha} = \frac{s+i\alpha}{s^2+\alpha^2}$

$$= \cos(\alpha t) + i \sin(\alpha t) =$$

$$\frac{s}{s^2+\alpha^2} + i \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\cos(\alpha t))(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2},$

$\mathcal{L}(\sin(\alpha t))(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}, \qquad s > 0$

Satz (Existenz und Eindeutigkeitssatz)

$f: \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, auf jedem endl Int. stückweise stetig diff.

f hat höchstens exp. Wachstum, d.h.: $\exists M, \sigma \in \mathbb{R}$

$|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma t}, \quad t \geq 0$, dann gilt

(i) $F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$ existiert $\forall s > \sigma$

(ii) Integral $\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt$ konv. glm.

$\forall s \geq s_0 > \sigma$

nicht von s abh.

d.h.: $\forall s_0 > \sigma : \forall \varepsilon > 0 \; \exists N = N(\varepsilon)$

$\forall n \in N(\varepsilon) : \left| \int_n^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| < \varepsilon$

(iii) $f(t)$ ist (bis auf Fkt.werte an Sprungstellen) durch $\mathcal{L}(f(t))(s)$ eindeutig bestimmt.

d.h.: $\mathcal{L}(f_1(t))(s) = \mathcal{L}(f_2(t))(s) \quad \forall s \in D$

$\Rightarrow f_1(t) = f_2(t) \; \forall t$ für die f_1, f_2 stetig sind

(iv) $\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}(f(t))(s) = 0$

Rechenregeln

- Linearität, Streckung: siehe Buch
- Diff / Int im Zeitbereich:

$F(s) = \mathcal{L}(f(t))(s)$, $f'(t)$ L. transf., f stetig auf $(0, \infty]$

$\Rightarrow \mathcal{L}(f'(t))(s) = s \cdot F(s) - f(0^+)$

allgemein unter geeigneter Voraussetzung

$$\mathcal{L}(f^{(n)}(t))(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0^+) - s^{n-2} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$$

$$\mathcal{L}(f'(t))(s) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f'(t)\,dt = f(t) e^{-st}\Big|_0^\infty - \int_0^\infty f(t) e^{-st}(-s)\,dt = 0 - f(0^+) + s \underbrace{\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt}_{\mathcal{L}(f(t))(s)}$$

- $\mathcal{L}(\underbrace{\int_0^t f(u)\,du}_{\substack{= G(t) \text{ Stammfkt.} \\ \text{von } f(t) \text{ mit } G(0) = 0}})(s) = \frac{1}{s} F(s)$

- Diff / Int im Bildbereich:

$\mathcal{L}(t \cdot f(t)) = - F'(s)$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt \;\Big|\; \frac{d}{ds} \Rightarrow F'(s) = \int_0^\infty \frac{d}{ds}(e^{-st} f(t))\,dt$$

$$= \int_0^\infty f(t) e^{-st}(-t)\,dt = \mathcal{L}(-t\, f(t))(s)$$

- $\frac{f(t)}{t}$ L. transf.: $\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \underbrace{\int_s^\infty F(u)\,du}_{\text{Stammfkt von } -F(s)}$

- <u>Verschiebung im Bildbereich:</u>

  $\mathcal{L}(f(t)\cdot e^{-at}) = F(s+a)\ , \ a>0$

- <u>Verschiebung im Zeitbereich</u>

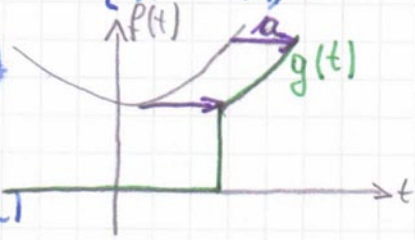
  Hilfsfunktion zur Beschreibung der Verschiebung

  Heavisidefunktion $u(t) = \begin{cases} 0 & t<0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$

  $g(t) = f(t-a)\,u(t-a)$

  $t<a: \ g(t) = 0$

  $t \geq a: \ g(t) = f(t-a)$



  $\mathcal{L}(f(t-a)\,u(t-a))(s) = e^{-as}F(s)$

- <u>Faltung (andere Faltung als bei F-trans)</u>

  $(f*g)(t) = \int_0^t f(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$

  $G(s) = \mathcal{L}(g(t))(s)$

  $\mathcal{L}((f*g)(t))(s) = F(s)\,G(s)$

Bsp.: $\cosh(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{\omega t} + e^{-\omega t}\right)$ Kettenlinie

$$\mathcal{L}(\cosh(\omega t))(s) = \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}(e^{\omega t}) + \mathcal{L}(e^{-\omega t})\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-\omega} + \frac{1}{s+\omega}\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2s}{s^2 - \omega^2}\right) = \frac{s}{s^2-\omega^2}$$

Bsp.: $f(t) = t^n \qquad \frac{d^n}{dt^n} f(t) = n! \cdot 1 \;\Big|\; \mathcal{L}$

$$= \mathcal{L}(n! \cdot 1) = n! \frac{1}{s} = \mathcal{L}(f^{(n)}(t)) =$$

$$= s^n \mathcal{L}(f(t))(s) - s^{n-1} f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+)$$

$$= s^n \mathcal{L}(t^n)(s)$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

11.Beginn VO am 18.12.2009

<u>Bsp.:</u> $\mathcal{L}\left(\frac{\sin(\omega t)}{t}\right)(s) = \int_s^\infty \mathcal{L}(\sin(\omega t))(u)\, du$

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s) = \int_s^\infty \mathcal{L}(f(t))(u)\, du$$

$$= \int_s^\infty \frac{\omega}{\omega^2 + u^2}\, du = \int_s^\infty \frac{1}{\left(\frac{u}{\omega}\right)^2 + 1}\, d\left(\frac{u}{\omega}\right) = \int_{\frac{s}{\omega}}^\infty \frac{1}{v^2+1}\, dv$$

$$= \arctan(v)\Big|_{\frac{s}{\omega}}^{\infty} = \underline{\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{s}{\omega}\right)}$$

<u>Bsp.:</u> Rechtecksschwingung

$$f_N(t) = -A + 2A \sum_{k=0}^{N} (-1)^k u\left(t - k\frac{T}{2}\right)$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$f_0(t) = -A + 2A \cdot u(t)$$

$$f_1(t) = -A + 2A\, u(t) - 2A\, u\left(t - \frac{T}{2}\right)$$

$$\lim_{N\to\infty} f_N(t) = f(t), \quad t \geq 0$$

$$\mathcal{L}(f(t))(s) = -A \cdot \frac{1}{s} + 2A \cdot \int_0^\infty \sum_{k=0}^\infty e^{-st} (-1)^k u\left(t - k\frac{T}{2}\right) dt$$

$$\overset{glm}{=} -\frac{A}{s} + 2A \sum_{k=0}^\infty (-1)^k e^{-s\frac{kT}{2}} \left(\frac{1}{s}\right)$$

$$= -\frac{A}{s} + \frac{2A}{s} \cdot \frac{1}{1 + e^{-s\frac{T}{2}}} = \frac{A}{s}\left(-1 + \frac{2}{1 + e^{-s\frac{T}{2}}}\right)$$

$$= \frac{A}{s}\left(\frac{1 - e^{-s\frac{T}{2}}}{1 + e^{-s\frac{T}{2}}}\right) = \frac{A}{s} \frac{\left(e^{s\frac{T}{4}} - e^{-s\frac{T}{4}}\right)/2}{\left(e^{s\frac{T}{4}} + e^{-s\frac{T}{4}}\right)/2} =$$

$$= \frac{A}{s} \frac{\sinh\left(s\frac{T}{4}\right)}{\cosh\left(s\frac{T}{4}\right)} = \frac{A}{s} \tanh\left(s\frac{T}{4}\right)$$

Wichtige Anwendung der $\mathcal{L}$-Transformation:

Lösung von linearen DGL mit konstanten ~~Faktoren~~ Koeffizienten + Anfangsbedingung

lin. DGL + AB, ges Fkt $x(t)$ $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ erhält eine rationale Fkt. für $\mathcal{L}(x(t))$ — Partialbruchzerlegung für rat. Fkt $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ $x(t)$ kann berechnet werden

Bsp.: $x''(t) + 9x(t) = \cos(\omega t)$

AWA: $x(0) = c_0$, $x'(0) = c_1$

$$\mathcal{L}(x''(t))(s) + 9\,\mathcal{L}(x(t))(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$s^2 X(s) - s\,c_0 - c_1 + 9\,X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

$$X(s)(s^2+9) = \frac{s}{s^2+\omega^2} + s\,c_0 + c_1$$

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+9)(s^2+\omega^2)} + \underbrace{c_0\frac{s}{s^2+9}}_{\downarrow \mathcal{L}^{-1}\ c_0\cdot\cos(3t)} + \underbrace{\frac{c_1}{3}\,\frac{3}{s^2+9}}_{\downarrow \mathcal{L}^{-1}\ \frac{c_1}{3}\sin(3t)}$$

1) $\omega \neq 3$

$$\frac{s}{(s^2+9)(s^2+\omega^2)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2+\omega^2}$$

$$\Rightarrow \ = \frac{1}{9-\omega^2}\left(\frac{s}{s^2+\omega^2} - \frac{s}{s^2+9}\right)$$

$$\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \frac{1}{9-\omega^2}(\cos(\omega t) - \cos(3t))$$

$$x(t) = \frac{1}{9-\omega^2}(\cos(\omega t) - \cos(3t)) + c_0\cos(3t) + \frac{c_1}{3}\sin(3t)$$

l) $\omega = 3$

$$\frac{s}{(s^2+9)^2} \quad \text{ges: } f(t): \ \mathcal{L}(f(t))(s) = \frac{s}{(s^2+9)^2}$$

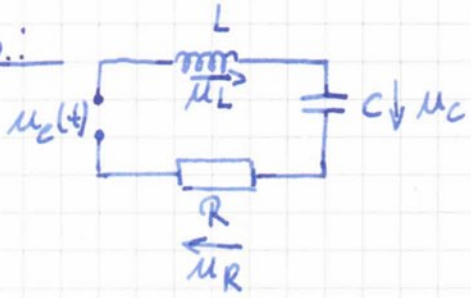
$$= \left(\frac{1}{(s^2+9)}\right)' \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\mathcal{L}(t \cdot g(t)) = -\frac{d}{ds}\,\mathcal{L}(g(t))$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\left(\frac{1}{6}\, t \, \sin(3t)\right) = \frac{1}{6}\left(-\frac{d}{ds}\,\frac{3}{s^2+9}\right) = \frac{s}{(s^2+9)^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = c_0 \cos(3t) + \frac{c_1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{6}\, t \sin(3t)$$

Bsp.:



$$u_e(t) = u_L(t) + u_C(t) + u_R(t)$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \cdot \int_0^t i(v)\, \cancel{dt}\, dv$$

$$u_L(t) = L \cdot \frac{d\, i(t)}{dt}$$

$$\mathcal{L}(i(t))(s) = I(s)$$

$$\mathcal{L}(u_\square(t))(s) = U_\square(s)$$

$$U_e(s) = U_L(s) + U_C(s) + U_R(s)$$

$$R i(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(v)\, dv + L\frac{d}{dt} i(t) = u_e(t) \quad /\mathcal{L}$$

$$R\, I(s) + \frac{1}{C}\,\frac{1}{s}\, I(s) + L s\, I(s) - i(0^+) = U_e(s)$$

$$I(s) = \frac{U_e(s)}{R + \frac{1}{Cs} + Ls} = \frac{s \cdot U_e(s) \cdot C}{LCs^2 + RCs + 1} =$$

$$= U_e(s)\, \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

<u>VS:</u> $LCs^2 + RCs + 1$ hat nur komplexe Nullstellen

$\Leftrightarrow (RC)^2 - 4LC < 0 \Leftrightarrow R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$H(s) = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1} = \alpha \frac{s}{(s+\beta)^2 + \omega^2}$$

$\downarrow \mathcal{L}^{-1}$

$$h(t) = \alpha \, e^{-\beta t} \cos(\omega t)$$

$$i(t) = h(t) * u_e(t) = \int_0^t h(t-\tau)\, u_e(\tau)\, d\tau$$

Partielle Differentialgleichungen

part. DGL = DGL für Funktionen in mehreren Variablen $\rightarrow$ part. Ableitungen

Bsp.:

1) gesucht: alle $u(x,y)$: $u_{xx} = 0 \quad / \int dx$

$u_x = c(y)$, $c(y)$ beliebige Fkt.

$u(x,y) = \int c(y)\,dx = c(y)\,x + d(y)$

$d(y)$ beliebige Fkt.

an Stelle von Konstanten in den allgemeinen Lösungen von gewöhnlichen DGL treten bei part. DGL beliebige Funktionen

2) $u(x,y)$: $u_{xy} = 0 \quad / \int dy$

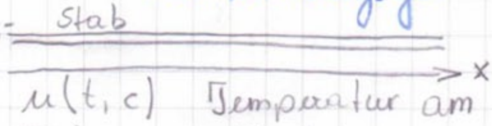
$u_x = c(x) \quad / \int dx$

$u(x,y) = \int c(x)\,dx + d(y)$

$= c_1(x) + d(y)$

c, d beliebige Fkt, c_1 diffbar

3) $u(t,x)$: $u_t = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Diffusions-} \\ \text{konst}}}{D}\, u_{xx}$ ... eindim. Wärmeleitungsgl.



$u(t,c)$ Temperatur am Ort x zur Zeit t

Produktansatz:

$u(t,x) = f(t)\,g(x)$

$u_t = f'(t)\,g(x)$

$u_{xx} = f(t) \cdot g''(x)$

$\rightarrow f'(t) \cdot g(x) = D \cdot f(t)\,g''(x)$

$$\frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{g''(x)}{g(x)} \cdot D = v(t,x)$$

$$\left.\begin{aligned} v_t &= \left(D\,\frac{g''(x)}{g(x)}\right)_t = 0 \\ v_x &= \left(D\,\frac{f'(t)}{f(t)}\right)_x = 0 \end{aligned}\right\} \to v(t,x) = k \ldots \text{konst}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'(t)}{f(t)} = k = D\,\frac{g''(x)}{g(x)}$$

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

$$f(t) = A \cdot e^{kt} \quad , \quad A \in \mathbb{R}$$

$$g''(x) = \frac{k}{D}\, g(x)$$

betrachte nur Fall $k < 0$ (Anwendung wichtiger)

$$k = -D c^2 \qquad c \in \mathbb{R}$$

$$g''(x) = -c^2 \cdot g(x) \quad \Rightarrow \quad g''(x) + c^2 g(x) = 0$$

$$\Rightarrow g(x) = B_1 \cos(cx) + B_2 \sin(cx)$$

$$\begin{aligned} u(t,x) &= f(t) \cdot g(x) = A\, e^{-Dc^2 t}\left(B_1 \cos(cx) + B_2 \sin(cx)\right) \\ &= e^{-Dc^2 t}\left(A_1 \cos(cx) + A_2 \sin(cx)\right) \end{aligned}$$

$A_1, A_2 \in \mathbb{R}$, c freie Konstante

weil DG linear

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-Dc_k^2 t}\left(A_{1,k} \cos(c_k x) + A_{2,k} \sin(c_k x)\right)$$

(bei weitem nicht alle Lösungen)

<u>Allgemein:</u> partielle DGL hat Gestalt

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_1 x_2}, \dots, \frac{\partial^m}{\partial_{x_1}^{m} \dots \partial_{x_n}^{m_n}} u\right) = 0$$

gesucht: $u(x_1, \dots, x_n)$ die Gleichung erfüllt

die Ordnung der DGL ist die höchste tatsächlich auftretende Ableitung

Bsp.: $u_t = D\, u_{xx}$ 2. Ordnung

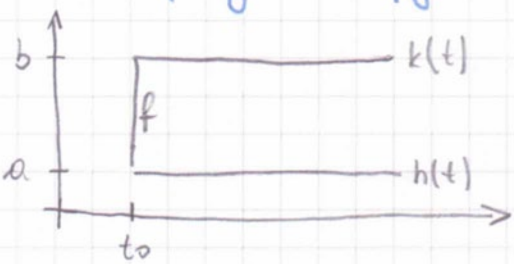
$u_{xy} = 0$ 2. Ordnung

<u>Verschiedene Arten von Nebenbedingungen</u> an $u(x_1, \dots, x_n)$

- Anfangswertaufgaben: $u(x, t_0) = f(x)$

  $u(x, t)$ in 2 Variablen $u_t(x, t_0) = g(x)$.

- Randanfangswertaufgaben $u(x, t_0) = f(x)$



$u_t(x, t_0) = g(x)$

$u(a, t) = h(t)$

$u(b, t) = k(t)$