Beispiel 158 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 11, 22.06.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man löse die inhomogene lineare Differentialgleichung

$$xy' + y = x^2 + 3x + 2$$

2 Theoretische Grundlagen: Lineare inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung

Für inhomogene lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung in der Form

$$y' + f(x) \cdot y = s(x)$$

gilt: Die allgemeine Lösung ist die Summe aus der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung.

1. Integration der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

   $$y' + f(x) \cdot y = 0$$

   Zunächst Trennung der Veränderlichen, dann Integration. Allgemeine Lösung ist schließlich (auch logarithmische Schreibweise möglich):

   $$y = c \cdot e^{-\int f(x)\,dx}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

2. Integration der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung

   Die aus der Lösung der homogenen Differentialgleichung gewonnene Integrationskonstante c wird durch die Funktion $c(x)$ ersetzt, so dass man den Lösungsansatz

   $$y = c(x) \cdot e^{-\int f(x)\,dx}$$

   erhält und diesen in die inhomogene Differentialgleichung einsetzt. Die so entstehende Differentialgleichung 1. Ordnung ist durch unbestimmte Integration direkt gelöst werden.

3. Summe aus der Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und einer partikulären Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung berechnen

3 Lösung des Beispiels

3.1 Vorbereitung

Wir bringen die gegebene Differentialgleichung $xy' + y = x^2 + 3x + 2$ zunächst auf die Form $y' + a(x) \cdot y = s(x)$:

$$y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{a(x)} \cdot y = \underbrace{x + 3 + \frac{2}{x}}_{s(x)}$$

3.2 Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung

Wir lösen zunächst die zugehörige homogene Differentialgleichung:

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \mid \int$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|c| \qquad \Rightarrow \qquad e^y = \frac{e^c}{e^x}$$

$$\mathbf{y_h^{(x)}} = \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{x}}$$

3.3 Berechnung der Partikulärlösung

Wir erhalten nun die partikuläre Lösung der zugehörigen inhomogenen Differentialgleichung $xy' + y = x^2 + 3x + 2$ durch die 'Variation der Konstanten' c, die aus der Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung gewonnen wird:

$$y_h^{(x)} = c \cdot \frac{1}{x} \qquad \Rightarrow \qquad y_p^{(x)} = c(\mathbf{x}) \cdot \frac{1}{x}$$

Wir setzen nun in die inhomogene Gleichung ein:

$$x \cdot (\overbrace{\underbrace{c'(x) \cdot \frac{1}{x}}_{\text{Ableitung nach y}} + \underbrace{c(x) \cdot (-\frac{1}{x^2})}_{\text{Ableitung nach x}})}^{\text{Ableitung nach Kettenregel}} = x^2 + 3x + 2$$

$$c'(x) = x^2 + 3x + 2 \qquad \Rightarrow \int \Rightarrow \qquad c(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x$$

Einsetzen in die partikuläre Lösung:

$$y_p^{(x)} = c(x) \cdot \frac{1}{x} = \mathbf{\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2}$$

3.4 Abschluss

Allgemeine Lösung zusammenfassen:

$$y(x) = y_p^{(h)} + y_p^{(x)} = \mathbf{\frac{1}{x} \cdot c + \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}x + 2}$$