Beispiel 54 (MA2 Sammlung)

LVA 118.153, Übungsrunde 7, 11.05.

Markus Nemetz, markus.nemetz@tuwien.ac.at, TU Wien, 05/2006

1 Angabe

Man bestimme das absolute Maximum der Funktion $f(x, y) = xy(3 - x - y)$ auf dem Definitionsbereich $D = \{(x, y)|x \geq 0, y \geq 0, y \leq 3 - x\}$.
(Anleitung: Man skizziere den Definitionsbereich D in der (x, y)-Ebene, bestimme dessen Rand und ermittle alle Funktionswerte auf dem Rand. Das absolute Maximum ist dann unter den relativen Maxima sowie unter den Funktionswerten am Rand von D zu suchen.)

2 Theoretische Grundlagen: Relative und lokale Extremwerte

Unter den **relativen Maxima und Minima** einer Funktion versteht man jene Punkte auf der Bildfläche von $z = f(x, y)$, die im Vergleich zur unmittelbaren Nachbarschaft eine höchste und eine tiefste Lage einnehmen.

Definition: Eine Funktion $z = f(x, y)$ besitzt an der Stelle (x_0, y_0) ein **relatives Maximum bzw. relatives Minimum**, wenn in einer gewissen Umgebung von (x_0, y_0) stets

$$f(x_0, y_0) > f(x, y) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x_0, y_0) < f(x, y)$$

ist $((x, y) \neq (x_0, y_0))$.

Anmerkungen dazu:

- Die relativen Maxima und Minima einer Funktion werden unter dem Sammelbegriff 'Relative Extremwerte' zusammengefasst. Die den Extremwerten entsprechenden Flächenpunkte heißen Hoch- bzw. Tiefpunkte.
- Ein relativer Extremwert wird auch als lokaler Extremwert bezeichnet, da die extreme Lage meist nur auf die unmittelbare Umgebung zutrifft.
- Wenn die in der obenstehenden Definition erwähnte Ungleichung an jeder Stelle (x, y) des Definitionsbereiches von $z = f(x, y)$ erfüllt ist, so liegt ein **absolutes Maximum bzw. Minimum** vor,

Wir vermuten dass die in einem Hoch-bzw. Tiefpunkt an die Fläche $z = f(x, y)$ angelegte Tangentialebene immer parallel zur x-y-Koordinatenebene verläuft, denn alle in einem Hoch- oder Tiefunkt P angelegten Flächtentangenten haben die Steigung 0. Daher müssen die ersten Ableitungen von $z = f(x, y)$ an der Stelle (x_0, y_0) verschwinden, damit die

Tangentialebene parallel zur x-y-Koordinatenebene verlaufen kann. Somit können wir die **notwendige Bedingung für einen relativen Extremwert** wie folgt definieren:

Definition: In einem relativen Extremum (x_0, y_0) der Funktion $z = f(x, y)$ besitzt die zugehörige Bildfläche stets eine zur x-y-Ebene parallele Tangentialebene. Die Bedingungen

$$f_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0, y_0) = 0$$

sind daher die notwendige Voraussetzung für die Existenz eines relativen Extremwertes an der Stelle (x_0, y_0).
Jedoch ist dies nur ein notwendiges, aber kein hinreichendes Kriterium, denn es existieren auch Punkte, welche nicht Hoch- oder Tiefpunkte sind und dennoch eine waagrechte Tangentialebene besitzen. Man betrachte z.B. $(0, 0)$ in $z = x^2 - y^2$. Die **hinreichenden Bedingungen für einen relativen Extremwert** sind wie folgt:

Definition: Eine Funktion $z = f(x, y)$ besitzt an der Stelle (x_0, y_0) mit Sicherheit einen relativen Extremwert, wenn die folgenden Bedingungen zugleich erfüllt sind:

1. Die partiellen Ableitungen 1. Ordnung verschwinden in (x_0, y_0):

   $$f_x(x_0, y_0) = 0 \qquad \text{und} \qquad f_y(x_0, y_0) = 0$$

2. Die partiellen Ableitungen 2. Ordnung genügen der Ungleichung

   $$\triangle = f_{xx}(x_0, y_0) \cdot f_{yy}(x_0, y_0) - f_{xy}^2(x_0, y_0) > 0$$

Wenn $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$ ist, so liegt ein relatives Maximum vor, für $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$ ein relatives Minimum.

Einige Anmerkungen:

1. Wie bei den Funktionen mit einer Variablen entscheiden auch hier die (partiellen) Ableitungen 1. und 2. Ordnung über Existenz und Art von Extremwerten.

2. Die Diskriminante $\triangle$ kann auch als zweireihige Determinante geschrieben werden:

   $$\triangle = \begin{vmatrix} f_{xx}(x_0, y_0) & f_{xy}(x_0, y_0) \\ f_{xy}(x_0, y_0) & f_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

3. In den Fällen von $\triangle < 0$ und $\triangle = 0$ gilt:

   - $\triangle < 0$: Es liegt kein Exremwert, sondern ein Sattelpunkt vor.
   - $\triangle = 0$: Es kann keine Entscheidung über Existenz und Art eines Extremwertes gefällt werden.

3 Lösung des Beispiels

Wir bilden zunächst die partiellen Ableitungen der gegebenen Funktion $f(x,y) = xy(3-x-y)$:

$$f_x = y(3-x-y) - xy = 3y - xy - y^2 - xy = 3y - 2xy - y^2 = y(3-2x-y)$$
$$f_y = 3x - 2xy - x^2 = x(3-2y-x)$$
$$f_{xy} = 3 - 2x - 2y$$
$$f_{xx} = -2y \qquad\qquad f_{yy} = -2x$$

f_x und f_y sind sicher Null wenn $x_1 = 0$ und $y_1 = 0$ sind.

Update nach der UE - einfachere Lösung: Betrachten

$$I: \qquad f_x = y(3-2x-y) = 0$$
$$II: \qquad f_y = x(3-2y-x) = 0$$

Daraus ergibt sich durch Faktorisierung:

- $x = 0 \ \wedge \ y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_1(0,0)$
- $x = 0 \ \wedge \ 3-2x-y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_2(0,3)$
- $y = 0 \ \wedge \ 3-2y-x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_3(3,0)$
- $3-2x-y = 0 \ \wedge \ 3-2y-x = 0 \qquad \Rightarrow \qquad P_4(1,1)$

Zu untersuchen sind nun die folgenden Punkte (welcher davon ein absolutes Maximum ist): $P_1(0,0)$, $P_2(0,3)$, $P_3(3,0)$, $P_4(1,1)$. Entweder man rechnet gleich alles nach 'Schema F' (s.u.) durch oder stellt fest, dass alleine $f_{xx}(P_4) < 0$ ist - dann testet man ob die hinreichende Bedingung für den Extremwert zutrifft und wir haben fertig.

- $P_1(0,0)$

  $$f_{xx}(0,0) = 0 \qquad f_{yy}(0,0) = 0 \qquad f_{yx}(0,0) = 3$$

  Nun die in der Definition angegebene Ungleichung einsetzen:

  $$\triangle_{P_1}: \qquad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$$

  P_1 ist somit ein Sattelpunkt.

- $P_2(0,3)$

  $$f_{xx}(0,3) = -6 \qquad f_{yy}(0,3) = 0 \qquad f_{yx}(0,3) = -3$$

  Nun die in der Definition angegebene Ungleichung einsetzen:

  $$\triangle_{P_2}: \qquad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$$

  P_2 ist somit ein Sattelpunkt.

- $P_3(3,0)$

$$f_{xx}(0,3) = 0 \qquad f_{yy}(0,3) = -6 \qquad f_{yx}(0,3) = -3$$

Nun die in der Definition angegebene Ungleichung einsetzen:

$$\triangle_{P_3}: \qquad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 < 0$$

P_3 ist somit ein Sattelpunkt.

- $P_4(1,1)$

$$f_{xx}(1,1) = -2 \qquad f_{yy}(1,1) = -2 \qquad f_{yx}(1,1) = -1$$

Nun die in der Definition angegebene Ungleichung einsetzen:

$$\triangle_{P_4}: \qquad f_{xx} \cdot f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$$

Da $f_{xx}(1,1) < 0$ ist ist P_4 ein relatives Maximum (und auch absolutes Maximum auf D).