2. Stufler Analysis-Klausur vom 23.2.2024

1. (a) Geben Sie die Definition von Differenzierbarkeit in einem Punkt für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an.

   (b) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch die Abbildungsvorschrift

   $$x \mapsto \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ 2x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$$

   Beweisen Sie, dass g in 0 nicht differenzierbar ist. Ist die Funktion in 0 stetig?

2. Für die Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n2^n} x^n$$

   bestimmen Sie für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe konvergiert und für welche sie insbesondere absolut konvergiert.

3. Überprüfen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

   (a) Sei $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende Folge aller natürlichen Zahlen, die die Ziffernfolge 42 enthalten, also sind z.B folgende Zahlen Teil der Folge: 9994299, 42, 142, 420, 1420,...

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{42}{m_n}$$

   (b)

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+7}{2^n}$$

   (c) In Situation von a), nehmen Sie an, dass eine weitere Folge $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert, die die Voraussetzungen erfüllt, zeigen Sie, dass $(k_n) = (m_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

4. Bestimmen Sie den Grenzwert der folgenden Folge (für $n \to \infty$):

   $$a_n := \frac{84}{n^2} \sum_{j=1}^{n} j.$$

5. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

   $$f(x, y) := x^2 + 2xy - y^2 + 42$$

   (a) Bestimmen Sie die stationären Punkte von f.

   (b) Berechnen Sie die Hesse-Matrix von f im Punkt (0,0).

   (c) Zeigen Sie, dass f keine lokalen Extrema besitzt.